目　　录

第 一 章

整函数的概念

1. 处处收敛的幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots \tag{1}$$

是多项式概念的自然推广.

如果式中从某一个 $n+1$ 开始所有的系数都转化为零，那末，作为这种幂级数的特殊情况，我们就得到次数不超过 n 的多项式：

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n. \tag{2}$$

从中学课本就已知道的最简单的幂级数

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

不是处处收敛的；它仅当 $|x|<1$ 时收敛. 在 $|x|\geqslant1$ 时，因系数太大(这里对任何 n 都有 $a_n=1$)而不能收敛.

可以证明，当且仅当

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=0 \tag{3}$$

时，幂级数(1)才对任何 x 收敛.

这里我们仅限于证明条件的充分性. 在 $x=0$ 时，级数(1)收敛. 今设 $x\neq0$. 于是，由条件(3)我们可以找到这样一个 N，使得当 $n>N$ 时，不等式 $\sqrt[n]{|a_n|}<\dfrac{1}{2|x|}$ 或 $|a_n||x^n|<\dfrac{1}{2^n}$ 成立. 但是，这意味着当 $n>N$ 时，幂级数(1)的所有项按绝对值比以 $\dfrac{1}{2}$ 为公比的几何级数的项来得小. 所以级数(1)不

但收敛，并且绝对收敛.

以下我们将认为条件(3)是满足的. 实际上，有时为方便计，我们利用级数(1)处处收敛的一个更简单的充分条件(但非必要条件)：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0. \tag{3'}$$

事实上，在这种情况下，级数(1)的后项与前项的比

$$a_{n+1}x^{n+1}:a_nx^n=(a_{n+1}:a_n)x$$

(假定 $a_n\neq 0, x\neq 0$)的极限同样是零. 根据著名的达朗贝尔判别法就可知道，级数对任意 x 收敛.

例如，因为

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以级数 $$x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n^n}+\cdots$$

处处收敛.

级数 $$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

同样处处收敛，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(n+1)!}:\frac{1}{n!}\right]=0.$$

2. 处处收敛的幂级数(1)的和叫做整函数.

由此得出，每一个多项式都是整函数.

整函数的其它例子有指数函数 $a^x(0<a,\ a\neq 1)$，$\cos x$，$\sin x$. 事实上，在数学分析教科书中(借助于泰勒公式)已证明了它们中的每一个都可表为处处收敛的幂级数的和：

$$a^x=1+\frac{x\ln a}{1!}+\frac{x^2(\ln a)^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n(\ln a)^n}{n!}+\cdots, \tag{4}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots, \tag{5}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots. \tag{6}$$

在 $a=e=2.71828\cdots$(e 是无理数)的特殊情况下，我们由公式(4)得到：

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots. \tag{7}$$

从这些公式出发，可以得到整函数的其它一些简单的例子：

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + \cdots,$$

$$e^{x^3} = 1 + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} + \cdots + \frac{x^{3n}}{n!} + \cdots,$$

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2!} + \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{4!} + \cdots + \frac{x^{n-2}}{n!} + \cdots,$$

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots,$$

$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{5!} + \cdots,$$

$$\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1 - \frac{x}{3!} + \frac{x^2}{5!} - \cdots,$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

等等。

所有这些例中的整函数或者是初等的(指数函数和三角函数)，或者是初等函数的简单组合。

但是，当然，整函数远不是总能表成初等函数的组合．例如整函数

$$f(x)=x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^3}+\cdots+\frac{x^n}{n^n}+\cdots,$$

$$g(x)=\frac{x^2}{(\ln 2)^2}+\frac{x^3}{(\ln 3)^3}+\cdots+\frac{x^n}{(\ln n)^n}+\cdots,$$

$$h(x)=x+\frac{x^2}{2^4}+\frac{x^3}{3^6}+\cdots+\frac{x^n}{n^{2n}}+\cdots$$

就是这种例子，还有无穷多个由形如(1)的级数定义的其它例子，只要它们的系数满足唯一的条件(3)．

3．到现在为止我们研究的整函数都默不作声地假定了幂级数的系数是实数，并且变量 x 也取实值．但是没有什么会妨碍我们把这一级数或那一级数认为是复数的，只要预先假定级数的系数满足条件(3)．事实上，在复数 x 取任何模值的情况下，这个条件保证了级数的绝对收敛性．下面，为了避免误会起见，我们继续用字母 x 表示实数，而复自变量我们将用字母 z 来表示，设 $z=x+iy$，其中 x 和 y 是实数，$i=\sqrt{-1}$．象通常一样，复数 z 在几何上用以 x 和 y 为坐标的平面上的点来表示．特别地，当 $y=0$ 时 z 就取实值 $z=x$．任何整函数都可以看作定义在全平面上的复变量 z 的函数．对指数函数和三角函数我们将沿用以前的名称和记号，我们有：

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots,\tag{7}$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\tag{8}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots.\tag{9}$$

4．整函数是复变量解析函数的特殊情况．如果复平面上任一区域 G 内的每一点 z 都对应于一个确定的复数 w，就说

在区域 G 上定义了一个复变量 z 的函数；w 称为函数在 z 的值，并记为

$$w=f(z);$$

符号 f 可换用其它拉丁字母或希腊字母来表示.

设 $w=f(z)$ 是定义在区域 G 上的一个函数，如果对于区域 G 内的每一点 z_0，都可以指出一个邻域（即以这一点为中心的圆），在这个邻域中函数值可以表示为 $z-z_0$ 的幂级数的和：

$$\begin{aligned} w=f(z)=c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots \\ +c_n(z-z_0)^n+\cdots, \end{aligned} \tag{10}$$

那么，这个复变函数叫做在区域 G 内的解析函数.

特别地，当区域 G 是以点 z_0 为中心的圆时，要 $f(z)$ 在区域 G 内是解析的，只要级数(10)在整个圆内表示函数 $f(z)$ 就可以了.

为了得到 $f(z)$ 在这个圆的另外任意一点 z_1 的邻域中的幂级数展式，只要在公式(10)中把 $z-z_0$ 表示为

$$z-z_0=(z-z_1)-(z_0-z_1),$$

并按差 $z-z_1$ 的幂展开级数的每一项 $a_n(z-z_0)^n$，然后把 $z-z_1$ 的同次幂的项归并在一起(也就是合并同类项).

对于圆形区域所说的话，同样适用于当 G 是整个复平面的情况；整个复平面可视为中心在任何一点，譬如说在坐标原点，半径为无穷大的圆.

在这种情况下，在公式(10)中可设 $z_0=0$，并要求级数在整个平面上收敛(正如上面所说的，是处处收敛的幂级数).

于是，整函数 $f(z)$ 可定义为在整个复平面 z 上解析的复变函数.

5. 复变函数 $f(z)$ 在它的定义域内任一点 z 的导数定义

为当 $z_1\to z(z_1\neq z)$ 时比 $\dfrac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}$ 的极限(如果它存在)，也就是

$$f'(z)=\lim_{z_1\to z}\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}.$$

由导数的这个定义可以导出求导数的法则，这些法则对于实变函数的情形已经建立了，对于复变函数的情况仍然保持成立。特别是，

$$[(z-z_0)^n]'=n(z-z_0)^{n-1}.$$

可以证明，在以 z_0 为中心的某一圆内收敛的幂级数(10)的和在这一圆内具有任意阶导数．其中每一个导数都可用对级数(10)进行相应次数的逐项微商的方法得到：

$$f'(z)=c_1+2c_2(z-z_0)+3c_3(z-z_0)^2+\cdots$$
$$+nc_n(z-z_0)^{n-1}+\cdots,$$
$$f''(z)=1\cdot 2c_2+2\cdot 3c_3(z-z_0)+\cdots$$
$$+(n-1)nc_n(z-z_0)^{n-2}+\cdots,$$
$$f'''(z)=1\cdot 2\cdot 3c_3+2\cdot 3\cdot 4c_4(z-z_0)+\cdots$$
$$+(n-2)(n-1)nc_n(z-z_0)^{n-3}+\cdots,$$

....

作为例子，用逐项求导数的办法从公式(7)，(8)和(9)我们得到

$$(e^z)'=e^z,\quad (\cos z)'=-\sin z,\quad (\sin z)'=\cos z.$$

在 $f(z)$, $f'(z)$, $f''(z)$, $\cdots$, $f^{(p)}(z)$, $\cdots$的级数中设 $z=z_0$, 我们得到

$$c_0=f(z_0),\quad c_1=f'(z_0),$$
$$c_2=\frac{f''(z_0)}{2!},\cdots,\quad c_p=\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!},\cdots;$$

因此，幂级数的系数用级数和的诸导数在点z_0的值表示了出来．所以，表示函数 $f(z)$ 的级数可以记为

$$f(z)=f(z_0)+\frac{f'(z_0)}{1!}(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\cdots+\frac{f^{(p)}(z_0)}{p!}(z-z_0)^p+\cdots.$$

这种形式的级数叫做函数 $f(z)$ 的泰勒级数．这样一来，解析函数 $f(z)$ 的幂级数就是它的泰勒级数．

由幂级数的系数表达式可得，如果两个按$z-z_0$的幂展开的幂级数的和在某个以z_0为中心的某一个圆内重合，那末，$z-z_0$的同次幂项的系数一定两两相等．

事实上，如果

$$a_0+a_1(z-z_0)+\cdots+a_n(z-z_0)^n+\cdots=b_0+b_1(z-z_0)+\cdots+b_n(z-z_0)^n+\cdots=f(z),$$

那末，
$$a_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad 和 \quad b_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

这就是，在$n=0, 1, 2, 3, \cdots$时，$a_n=b_n$（$f^{(0)}(z)$所指的是和函数 $f(z)$本身，而$0!$理解为等于1）．

由幂级数的和有导数这一事实推出，在区域G内解析的函数$f(z)$在这个区域的每一点有导数，也就是在区域G内可微；所以它在区域G内也是连续的．

这就是为什么复变数的解析函数的定义可以表述为下面的形式：定义在某个区域 G 内的复变数 z 的函数 $f(z)$，如果它在G内是可微的，则称它在这个区域内是解析的．在函数论的教科书中通常用的就是这个定义．

因此，整函数可以定义为在全平面可微的函数．

设 $f(z)$和 $g(z)$是任意两个整函数．由求导法则可得：

$$[f(z)\pm g(z)]'=f'(z)\pm g'(z),$$

$$[f(z)\cdot g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z),$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}\quad(\text{若 } g(z)\neq 0),$$

$$\{f[g(z)]\}'=f'[g(z)]g'(z).$$

由前两个公式可得，两个整函数的和、差、积是整函数.

由第三个公式可得，当分母处处不为零时，两个整函数的商仍然是整函数.

第四个公式是复合函数求导法，由它可得，整函数的整函数仍然是整函数.

例如函数

$$e^{\sin z},\quad e^{e^z},\quad \sin(e^z),\quad \sin(\cos z)$$

等等都是整函数.

6. 由于处处收敛的幂级数的(绝对)收敛性，它具有许多有限和的性质.

在任何情况下，对幂级数施行加法、减法和乘法运算，象对依 z 的升幂排列的多项式施行相应的运算一样，服从相同的法则. 例如，如果

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots,$$

$$g(z)=b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots,$$

那末，

$$\left.\begin{aligned}f(z)\pm g(z)=&a_0\pm b_0+(a_1\pm b_1)z+(a_2\pm b_2)z^2+\cdots\\&+(a_n\pm b_n)z^n+\cdots,\\f(z)g(z)=&a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)z\\&+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)z^2+\cdots\\&+(a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}\\&+\cdots+a_nb_0)z^n+\cdots.\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

如果还知道 $g(z)$ 对任何的 z 都不为零，那末可以断言(见 5)，商 $f(z):g(z)$ 是整函数；相应的幂级数由 $g(z)$ 的幂级数去除 $f(z)$ 的幂级数得到，除法法则与排列好的多项式的除法相同.

我们来做这个运算的前面几步：

$$\begin{array}{l|l}
a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots & b_0+b_1z+b_2z^2+\cdots+b_nz^n+\cdots \\ \hline
 & \dfrac{a_0}{b_0}+\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0^2}z+\cdots \\
\underline{-a_0+\dfrac{a_0b_1}{b_0}z+\dfrac{a_0b_2}{b_0}z^2+\cdots} & \\
\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0}z+\dfrac{a_2b_0-a_0b_2}{b_0}z^2+\cdots & \\
\underline{-\dfrac{a_1b_0-a_0b_1}{b_0}z+\dfrac{(a_1b_0-a_0b_1)b_1}{b_0^2}z^2+\cdots} & \\
\dfrac{(a_2b_0-a_0b_2)b_0-(a_1b_0-a_0b_1)b_1}{b_0^2}z^2+\cdots &
\end{array}$$

…………………………………

于是，

$$\frac{f(z)}{g(z)}=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n+\cdots, \tag{12}$$

这里 $c_0, c_1, c_2, \cdots$ 具有上面所求出的值(见商的前几项). 可以相信，商的每一个系数 c_n 可由前面的系数 $c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}$ 通过公式

$$c_n=-\frac{c_0b_n+c_1b_{n-1}+\cdots+c_{n-1}b_1}{b_0} \tag{13}$$

来表示.

7. 我们看整函数(7), (8)和(9). 在公式(7)中设 $z=iw$，其中 w 仍是复变数，我们求得：

$$e^{iw}=1+\frac{iw}{1!}-\frac{w^2}{2!}-\frac{iw^3}{3!}+\frac{w^4}{4!}+\cdots$$

$$=\left(1-\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}-\cdots\right)$$

$$+i\left(w-\frac{w^3}{3!}+\frac{w^5}{5!}-\cdots\right),$$

由此(同公式(8)和(9)比较)

$$e^{iw}=\cos w+i\sin w. \tag{14}$$

这就是通过三角函数表达指数函数的著名的欧拉公式.注意,在公式(8)和(9)中,余弦的分解式只包含变数的偶次幂,而正弦的分解式只包含变数的奇次幂;因此,对变数的复数值而言,余弦是偶函数而正弦是奇函数.所以把 w 换成 $-w$ 公式(14)就变为下面的公式:

$$e^{-iw}=\cos w-i\sin w. \tag{15}$$

把公式(14)和(15)逐项相加和相减,又可得到两个用指数函数表示三角函数的欧拉公式:

$$\cos w=\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2},\quad \sin w=\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}. \tag{16}$$

由欧拉公式知道,在整函数的领域中可以这样说,复变数的指数函数和三角函数是亲缘最近的.

从级数相乘的例子我们可构造出 e^{z_1} 的级数和 e^{z_2} 的级数的乘积,其中 z_1 和 z_2 是任意两个复数.

因为 $$e^{z_1}=1+\frac{z_1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}+\cdots+\frac{z_1^n}{n!}+\cdots,$$

$$e^{z_2}=1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_2^3}{3!}+\cdots+\frac{z_2^n}{n!}+\cdots,$$

所以

$$e^{z_1}e^{z_2}=1+\frac{1}{1!}(z_1+z_2)+\frac{1}{2!}(z_1^2+2z_1z_2+z_2^2)$$

$$+\frac{1}{3!}\left(z_1^3+\frac{3!}{2!1!}z_1^2z_2+\frac{3!}{1!2!}z_1z_2^2+z_2^3\right)+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\left(z_1^n+\frac{n!}{(n-1)!1!}z_1^{n-1}z_2\right.$$

$$+\frac{n!}{(n-2)!2!}z_1^{n-2}z_2^2+\cdots$$

$$\left.+\frac{n!}{1!(n-1)!}z_1z_2^{n-1}+z_2^n\right)+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{1!}(z_1+z_2)+\frac{1}{2!}(z_1+z_2)^2$$

$$+\frac{1}{3!}(z_1+z_2)^3+\cdots+\frac{1}{n!}(z_1+z_2)^n+\cdots,$$

由此得出

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2}. \tag{17}$$

这个公式叫做指数函数的*加法定理*. 我们看到了，当这一函数的两个值相乘时，相应的指数(复数 z_1 和 z_2)相加.

特别地，在这里设 $z_1=z$ 和 $z_2=-z$，我们就得到：

$$e^z\cdot e^{-z}=e^0=1. \tag{18}$$

由于这个公式，乘积 $e^z\cdot e^{-z}$ 不等于零，由此首先推出，*指数函数 e^z 永不为零*，也就是方程 $e^z=0$ 不仅没有实根也没有虚根(我们把不是实数的任何复数叫做虚数；例如 i，$(1-i)$ 都是虚数).

等式(18)使得有可能用特殊的例子去检验，如果分母总不为零，则两个整函数的商是整函数(见第5段). 商 $1/e^z$ 显然满足这一条件. 由公式(18)可得，

$$\frac{1}{e^z}=e^{-z}=1-\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots;$$

这的确是一个整函数（在公式(7)中我们用 $-z$ 代替 z 就得到它）.

下面将证明（见 9），任何处处不为零的整函数 $g(z)$ 都可以表示成 $g(z)=e^{h(z)}$，这里 $h(z)$ 也是一个整函数.

显然，商 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 可以表示成积 $f(z)e^{-h(z)}$ 的形式，由此又看到，这是一个整函数（作为两个整函数的乘积）.

把(14)和(15)乘起来，我们得到：

$$e^{iw}\cdot e^{-iw}=(\cos w+i\sin w)(\cos w-i\sin w),$$

再由等式(18)得：

$$1=\cos^2 w+\sin^2 w. \tag{19}$$

因此，对任何复变数的值正弦和余弦的平方和都等于 1.

在等式(17)中设 $z_1=z$ 是任意一个复数，而 $z_2=2\pi i$，我们得到：

$$e^z e^{2\pi i}=e^{z+2\pi i}.$$

但是根据欧拉公式(14)

$$e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1;$$

因此

$$e^z=e^{z+2\pi i}, \tag{20}$$

即，指数函数是以纯虚数 $2\pi i$ 为周期的周期函数.

再计算复数 e^z 的模和幅角. 根据公式(17)我们得到：

$$e^z=e^{x+iy}=e^x e^{iy}.$$

但是 $e^{iy}=\cos y+i\sin y$；因此，

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y).$$

我们得到了 e^z 的三角函数表示：$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. 由此得出，

$$|e^z|=e^x,\quad \operatorname{Arg}(e^z)=y+2n\pi \quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

所得公式的第一个指出，为了计算 e^z 的模只要在指数中留下

实部 x 就行了(去掉被加数 iy)；例如，$|e^{1+i\sqrt{2}}|=e$.

8. 我们来研究方程

$$e^z=A. \tag{21}$$

因为我们知道，当 $A=0$ 时这个方程没有任何一个根，所以我们认为 $A\neq 0$. 由复数 e^z 和 A 相等导出，它们的模相等，而幅角只可以相差 2π 的整数倍. 但是在第 7 段中已经指出，如果 $z=x+iy$，那末，e^z 的模是 e^x，而 e^z 的一个幅角值是 y.

所以由(21)必定得到等式：

$$e^x=|A|,\ y=\arg A+2n\pi \quad (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

因此，$x=\ln|A|$ 而

$$z=x+iy=\ln|A|+i(\arg A+2n\pi), \tag{22}$$
$$n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

于是，方程(21)的任意一个根都应该包含在公式(22)中. 反之，形如(22)的每一个数(它们有无穷多个！)都是这个方程的根. 事实上，

$$\begin{aligned}e^z&=e^{\ln|A|+i(\arg A+2n\pi)}=e^{\ln|A|}e^{i(\arg A+2n\pi)}\\&=|A|[\cos(\arg A+2n\pi)+i\sin(\arg A+2n\pi)]\\&=|A|[\cos(\arg A)+i\sin(\arg A)]=A.\end{aligned}$$

这就证明了，方程(21)对任何的 A，除去一个例外值 $A=0$，有无穷多个根(22). 换言之，无穷高次方程

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=A$$

对任何复数 $A\neq 0$ 有无穷多个根.

自然地，方程(21)的每一个根叫做复数 A 的(自然)对数值. 以 e 为底产生 A 的幂指数一般记为 $\mathrm{Ln}\,A$，由此公式(22)可改写为下面的形式：

$$\mathrm{Ln}\,A=\ln|A|+i\,\mathrm{Arg}\,A=\ln|A|+i(\arg A+2n\pi), \tag{22'}$$

其中 $n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

由此得到，任何复数有无穷多个对数值，它们彼此相差 2π 的整数倍. 当 $n=0$ 时，公式(22′)给出的值称为对数的主值：

$$\ln A=\ln|A|+i\arg A. \tag{22''}$$

9. 我们把方程(21)中的复数 A 作为自变数，而把它所对应的值 z，即方程的根，作为 A 的函数来研究. 这个函数 $z=\operatorname{Ln} A$ 叫做指数函数 $A=e^z$ 的反函数. 在第8段中我们已经发现，$\operatorname{Ln} A$ 是一个定义在除去点 $A=0$ 之外的全平面内的多值函数，并由公式(22′)表示.

由反函数的求导法则，这一法则对于复变函数的相应叙述仍然有效，得出导数 $(\operatorname{Ln} A)'$ 存在并等于

$$\frac{1}{(e^z)'}=\frac{1}{e^z}=\frac{1}{A} \quad (A\neq 0).$$

我们用复自变数的习惯表示 z 来代替 A. 这时有

$$\operatorname{Ln} z=\ln|z|+i\operatorname{Arg} z,$$

$$(\operatorname{Ln} z)'=\frac{1}{z} \quad (z\neq 0).$$

函数 $\operatorname{Ln} z$ 不是整函数，第一是因为它在点 $z=0$ 无定义(在这点它变为 ∞)，第二是因为它是多值的，它的值彼此相差 $2\pi i$ 的整数倍.

但是如果 $g(z)$ 是任意一个整函数，它在平面的任何一点都不为零，那末 $f(z)=\operatorname{Ln} g(z)$ 同样是整函数(精确些说，$\operatorname{Ln} g(z)$ 代表无穷多个整函数，它们彼此相差 $2\pi i$ 的整数倍).

事实上，根据复合函数求导的一般法则，我们得到

$$[\operatorname{Ln} g(z)]'=\frac{1}{g(z)}\,g'(z)=\frac{g'(z)}{g(z)},$$

即，函数 $\operatorname{Ln} g(z)$ 在复平面的每一点都有导数(我们记得，

$g(z)\neq 0$)，所以它是整函数．作为例子，设 $g(z)=e^z$．这时

$$\operatorname{Ln}(e^z)=\ln|e^z|+i\operatorname{Arg}e^z;$$

但是 $|e^z|=e^x$ 和 $\operatorname{Arg}e^z=y+2n\pi$（见第 7 段），所以

$$\operatorname{Ln}(e^z)=\ln(e^x)+i(y+2n\pi)=x+iy+i\cdot 2n\pi=z+2n\pi i,$$

$$n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \cdots.$$

我们看到了，$\operatorname{Ln}(e^z)$ 代表无穷多个整函数：

$$z,\ z+2\pi i,\ z-2\pi i,\ z+4\pi i,\ z-4\pi i,\ \cdots$$

由上面的叙述推出一个我们经常要用到的定理：若 $f(z)$ 是一个在任何一点都不为零的整函数，那末，它可以表示为

$$f(z)=e^{g(z)},$$

其中 $g(z)$ 是某一个整函数．

事实上，根据前面的证明，$\operatorname{Ln}f(z)$ 代表无穷多个整函数，它们彼此相差 $2\pi i$ 的整数倍，其中任取一个记为 $g(z)$，那末

$$\operatorname{Ln}f(z)=g(z)+2n\pi i\quad(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots),$$

因此，

$$f(z)=e^{\operatorname{Ln}f(z)}=e^{g(z)+2n\pi i}=e^{g(z)};$$

我们利用了指数函数的周期是 $2\pi i$（见第 7 段）．定理得证．

第 二 章

最大模和整函数的级

10. 奇妙的是，一个整函数的幂级数的系数可以表示为积分的形式，在积分号下包含着已知函数.

设 z 在复平面上描过一个中心在坐标原点半径为 $r>0$ 的圆周. 显然，这样一个圆周可以用方程 $|z|=r$ 来刻画. 所以 z 可以表示为

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi);$$

复数 z 的幅角 φ 从 0 变到 2π，这时 z 沿逆时针方向描过圆周一次.

若 $w=F(z)$ 是任何一个复变数的函数，它在圆周 $|z|=r$ 包含的一个区域内是解析的，那末，对在圆周上的点，$F(z)$ 的值可以看作是一个实变数 φ 的函数；每一个 $\varphi(0\leqslant\varphi\leqslant2\pi)$ 对应一个确定的 z，因此复数

$$w=u+iv=F(z)$$

(这里 u 和 v 是 w 的实部和虚部)是 φ 的函数. 所以 u 和 v 同样是 φ 的函数：

$$u=P(\varphi),\quad v=Q(\varphi),$$

由此

$$F(z)=P(\varphi)+iQ(\varphi).$$

借助于数

$$\varphi_0=0<\varphi_1<\varphi_2<\cdots<\varphi_{n-1}<\varphi_n=2\pi,$$

我们把区间[0, 2π]作分割，对 $F(z)$ 构造相应的积分和，使得每个 φ_k 的值对应于圆周上一个确定的点 z_k,

$$z_k=r(\cos\varphi_k+i\sin\varphi_k),$$

而函数值为 $F(z_k)=P(\varphi_k)+iQ(\varphi_k)$.

根据定义，函数 $F(z)$ 的积分和可表示为

$$\sum_1^n F(z_k)(\varphi_k-\varphi_{k-1})=\sum_1^n [P(\varphi_k)+iQ(\varphi_k)](\varphi_k-\varphi_{k-1})$$

$$=\sum_1^n P(\varphi_k)(\varphi_k-\varphi_{k-1})$$

$$+i\sum_1^n Q(\varphi_k)(\varphi_k-\varphi_{k-1}).$$

我们指出，解析函数 $F(z)$ 是可微的，也是连续的；由此导出，它的实部 $P(\varphi)$ 和虚部 $Q(\varphi)$ 在区间 $[0,\ 2\pi]$ 上也是连续的. 对区间 $[0,\ 2\pi]$ 作无限细分，使得差

$$\varphi_1-\varphi_0,\ \varphi_2-\varphi_1,\ \cdots,\ \varphi_n-\varphi_{n-1}$$

中最大者趋近于零，和

$$\sum_1^n P(\varphi_k)(\varphi_k-\varphi_{k-1}) \quad 与 \quad \sum_1^n Q(\varphi_k)(\varphi_k-\varphi_{k-1})$$

将趋近于它们的极限，也就是分别趋向于积分

$$\int_0^{2\pi} P(\varphi)d\varphi \quad 与 \quad \int_0^{2\pi} Q(\varphi)d\varphi.$$

因此，复的积分和

$$\sum_1^n F(z_k)(\varphi_k-\varphi_{k-1})$$

同样有极限，我们把它记为

$$\int_0^{2\pi} F(z)d\varphi.$$

由上面所述可得，

$$\int_0^{2\pi} F(z)\,d\varphi=\int_0^{2\pi} P(\varphi)d\varphi+i\int_0^{2\pi} Q(\varphi)d\varphi.$$

这样一来，我们在特殊的情况下定义了复函数 $F(z)$ 的积分，并且通过这个函数的实部和虚部的积分把它表达了出来. 由

不等式

$$\left|\sum_1^n F(z_k)(\varphi_k-\varphi_{k-1})\right| \leqslant \sum_1^n |F(z_k)|(\varphi_k-\varphi_{k-1})$$

再借助极限过程我们得到：

$$\left|\int_0^{2\pi} F(z)d\varphi\right| \leqslant \int_0^{2\pi} |F(z)|d\varphi,$$

也就是积分的模不超过被积函数的模的积分.

我们转向把整函数的幂级数的任一系数 $a_p(p\geqslant 0)$ 表示成积分形式的问题. 以此为目的，我们用 z^p 去除级数所有的项，并对变数 φ 从 0 到 2π 积分. 首先(在除以后)得到

$$\frac{f(z)}{z^p}=a_0z^{-p}+a_1z^{1-p}+\cdots+a_p+a_{p+1}z+\cdots,$$

其后得到

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{z^p}d\varphi=a_0\int_0^{2\pi}z^{-p}d\varphi+a_1\int_0^{2\pi}z^{-p+1}d\varphi+\cdots$$
$$+a_p\int_0^{2\pi}d\varphi+a_{p+1}\int_0^{2\pi}z\,d\varphi+\cdots,$$

其中 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ (r 是常数).

在这里我们不拟停留下来去证明级数逐项积分的合法性(证明这一点归结为当 r 固定时建立级数关于变数 φ 的一致收敛性).

在右边以 a_p 为系数的积分等于 2π，所以相应的项等于 $2\pi a_p$. 至于其余的，在积分号下是 z 的非 0 的整数次幂的那些积分，它们全都等于 0. 事实上，如果 m 是一个自然数，那末根据棣莫佛公式

$$z^m=r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi).$$

如果 $m=-k$, $k>0$, 那末

$$z^m=\frac{1}{z^k}=\frac{1}{r^k(\cos k\varphi+i\sin k\varphi)}$$
$$=r^{-k}[\cos(-k\varphi)+i\sin(-k\varphi)]$$
$$=r^m(\cos m\varphi+i\sin m\varphi).$$

因此，对任何整数 $m\neq 0$,

$$\int_0^{2\pi} z^m d\varphi=r^m\int_0^{2\pi}(\cos m\varphi+i\sin m\varphi)d\varphi$$
$$=r^m\left[-\frac{\sin m\varphi}{m}+i\frac{\cos m\varphi}{m}\right]_0^{2\pi}=0.$$

所以
$$\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{z^p}d\varphi=2\pi a_p,$$

由此

$$a_p=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{z^p}d\varphi,\quad \text{这里 } z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \tag{23}$$

这个公式对于 $p=0, 1, 2, 3, \cdots$ 都是正确的. 我们用 $M(r)$ 表示在半径为 r 的圆内函数 $f(z)$ 的最大模:

$$M(r)=\max_{|z|\leqslant r}|f(z)|^*.$$

由公式(23)得到:

$$|a_p|=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(z)}{z^p}d\varphi\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z)|}{|z|^p}d\varphi.$$

但是在 $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ 的条件下

$$|z|=r \quad \text{和} \quad |f(z)|\leqslant M(r).$$

因此

$$|a_p|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{M(r)}{r^p}d\varphi=\frac{M(r)}{r^p},$$
$$p=0, 1, 2, \cdots. \tag{24}$$

---

* 在附录(§1)中证明了，整函数的模不在圆的内点上达到它在圆内的最大值，而在圆周上达到，即在圆的边界点上达到. 所以在整个圆上整函数模的最大值与它在圆周上的模的最大值重合.

这就是关于幂级数系数的柯西不等式.

11. 上段遇到的函数 $M(r)$ 在整函数的理论中起着非常重要的作用. 要精确地计算它即使对最简单的整函数也会碰到困难. 但是通常只要会估计它的上界和下界就够了.

我们首先研究 $n(n\geqslant 1)$ 次多项式的情况:

$$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n,\quad a_n\neq 0.$$

如果 z 位于中心在坐标原点半径为 r 的圆内, 那末 $|z|\leqslant r$, 因此

$$\begin{aligned}|P(z)|&=|a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n|\\&\leqslant|a_0|+|a_1||z|+\cdots+|a_n||z^n|\\&\leqslant|a_0|+|a_1|r+\cdots+|a_n|r^n\end{aligned}$$

或者

$$|P(z)|\leqslant|a_n|r^n\left[1+\left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\frac{1}{r}+\cdots+\frac{|a_0|}{|a_n|}\frac{1}{r^n}\right)\right].$$

当 $r\to\infty$ 时, 圆括号内的和趋向于零. 所以对于无论怎样小的正数 $\varepsilon<1$, 总可以找到一个 $r_0(\varepsilon)$, 使得当 $r>r_0(\varepsilon)$ 时, 下面的不等式成立:

$$\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\frac{1}{r}+\cdots+\frac{|a_0|}{|a_n|}\frac{1}{r^n}<\varepsilon. \tag{25}$$

因此, 在 $r>r_0(\varepsilon)$ 和 $|z|\leqslant r$ 时,

$$|P(z)|\leqslant|a_n|r^n(1+\varepsilon). \tag{26}$$

我们来研究 $|P(z)|$ 在任一点 z_0 处的值, z_0 位于圆周 $|z|=r$ 上, $|z_0|=r$. 在这一点同样应该满足不等式(26)(在 $r>r_0(\varepsilon)$ 的条件下). 另一方面,

$$
\begin{aligned}
|P(z_0)| &= |a_n z_0^n + (a_{n-1}z_0^{n-1} + \cdots + a_0)| \\
&\geqslant |a_n z_0^n| - |a_{n-1}z_0^{n-1} + \cdots + a_0| \\
&\geqslant |a_n||z_0^n| - |a_{n-1}||z_0^{n-1}| - \cdots - |a_0| \\
&= |a_n| r^n - |a_{n-1}| r^{n-1} - \cdots - |a_0| \\
&= |a_n| r^n \left[1 - \left(\frac{|a_{n-1}|}{|a_n|}\frac{1}{r} + \cdots + \frac{|a_0|}{|a_n|}\frac{1}{r^n}\right)\right].
\end{aligned}
$$

当 $r > r_0(\varepsilon)$ 时，由于(25)我们得到：

$$
|P(z_0)| \geqslant |a_n| r^n (1-\varepsilon). \tag{27}
$$

这样一来，对任意的 $\varepsilon > 0$ 和对所有足够大的 r，多项式 $P(z)$ 在点 z_0 的模（$|z_0| = r$）满足不等式

$$
|a_n| r^n (1-\varepsilon) \leqslant |P(z)| \leqslant |a_n| r^n (1+\varepsilon). \tag{28}
$$

这个双边不等式我们在附录中要用到它．我们指出，不等式对于零次多项式的情况（$n=0$）显然是正确的．再回到不等式(26)，我们断言，这个不等式对于圆 $|z| \leqslant r$ 内使 $|P(z)|$ 取得自己的最大值 $M(r)$ 的点也是正确的，所以

$$
M(r) \leqslant |a_n| r^n (1+\varepsilon), \quad r > r_0(\varepsilon). \tag{29}
$$

另一方面，$|P(z)|$ 在圆周 $|z| = r$ 上点 z_0 处的值不能超过 $M(r)$；因此，由不等式(27)我们断定

$$
M(r) \geqslant |a_n| r^n (1-\varepsilon), \quad r > r_0(\varepsilon). \tag{30}
$$

当 $r > r_0(\varepsilon)$ 时，由(29)和(30)推出，

$$
1 - \varepsilon \leqslant \frac{M(r)}{|a_n| r^n} \leqslant 1 + \varepsilon,
$$

并且因为这里的 ε 可以任意小，所以

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{M(r)}{|a_n| r^n} = 1. \tag{31}
$$

这个关系式可简单地叙述为：n 次多项式的模的最大值渐

近地等于多项式的最高项的模(事实上，若 $|z|=r$，则 $|a_n|r^n=|a_nz^n|$)。

12. 我们对 e^z，$\cos z$ 和 $\sin z$ 计算函数 $M(r)$. 为了不使它们混淆，引进记号

$$M(r,\ e^z),\ M(r,\ \cos z),\ M(r,\ \sin z).$$

基于幂级数和的模的估计之上的同样的讨论，适用于这三种情况中的任何一种。

由公式 $$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$$

推出

$$|e^z|=\left|1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots\right|$$

$$\leqslant 1+\frac{|z|}{1!}+\frac{|z|^2}{2!}+\cdots+\frac{|z|^n}{n!}+\cdots.$$

在以 r 为半径以坐标原点为中心的圆内，我们有 $|z|\leqslant r$；所以

$$|e^z|\leqslant 1+\frac{r}{1!}+\frac{r^2}{2!}+\cdots+\frac{r^n}{n!}+\cdots,\quad |z|\leqslant r.$$

这样一来，在圆 $|z|\leqslant r$ 内 $|e^z|$不超过 e^r. 但是对于处在边界上的点 $z=r$，值 $e^z=e^r$ 及 $|e^z|=e^r$. 所以在这一点指数函数的模达到了它的最大可能值，因此，

$$M(r,e^z)=\max_{|z|\leqslant r}|e^z|=e^r. \tag{32}$$

类似地，由公式

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots$$

引出 $$|\cos z|\leqslant 1+\frac{|z|^2}{2!}+\frac{|z|^4}{4!}+\frac{|z|^6}{6!}+\cdots,$$

由此，在半径为 r 的圆内有

$$|\cos z| \leqslant 1+\frac{r^2}{2!}+\frac{r^4}{4!}+\frac{r^6}{6!}+\cdots.$$

这个不等式右边的和等于 $\operatorname{ch} r=\dfrac{e^r+e^{-r}}{2}$（见第 3 页的公式）.

于是，
$$|\cos z| \leqslant \frac{e^r+e^{-r}}{2}, \quad |z| \leqslant r.$$

但是在圆的边界点 $z=ir$ 处，

$$\cos z=\cos(ir)=\frac{e^{i(ir)}+e^{-i(ir)}}{2}=\frac{e^{-r}+e^r}{2}\ ^*,$$

所以 $\dfrac{e^r+e^{-r}}{2}$ 同余弦在圆 $|z| \leqslant r$ 内的最大模重合，也就是，

$$M(r;\ \cos z)=\max_{|z| \leqslant r}|\cos z|=\frac{e^r+e^{-r}}{2}. \tag{33}$$

最后，由公式

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots$$

引出，
$$|\sin z| \leqslant |z|+\frac{|z|^3}{3!}+\frac{|z|^5}{5!}+\frac{|z|^7}{7!}+\cdots,$$

由此，在半径为 r 的圆内有

$$|\sin z| \leqslant r+\frac{r^3}{3!}+\frac{r^5}{5!}+\frac{r^7}{7!}+\cdots.$$

这个不等式右边的和等于 $\operatorname{sh} r=\dfrac{e^r-e^{-r}}{2}$（见第 3 页公式）.

于是，
$$|\sin z| \leqslant \frac{e^r-e^{-r}}{2}, \quad |z| \leqslant r.$$

但是在圆的边界点 $z=ir$ 处，

$$|\sin z|=|\sin(ir)|=\left|\frac{e^{i(ir)}-e^{-i(ir)}}{2i}\right|$$
$$=\left|\frac{e^{-r}-e^r}{2}\right|=\frac{e^r-e^{-r}}{2}\ ^{**}$$

---

* 我们指出，在点 $z=-ir$ 函数 $\cos z$ 取同一个值（要知道，这是一个偶函数）.

** 在点 $z=-ir$，$|\sin z|$ 取同一个值（要知道，$\sin z$ 是一个奇函数）.

所以 $\frac{e^r-e^{-r}}{2}$ 同正弦在圆 $|z|\leqslant r$ 内的最大模重合，也就是，

$$M(r,\ \sin z)=\max_{|z|\leqslant r}|\sin z|=\frac{e^r-e^{-r}}{2}. \qquad (34)$$

13. 容易理解，在所有的情况下整函数模的最大值都是半径 r 的非减函数．事实上，若 $r_1>r$，那末中心在坐标原点半径为 r_1 的圆包含中心在同一点而半径为 r 的圆．所以在寻找 $|f(z)|$ 在大圆中的最大值时，也就是在寻找数 $M(r_1)$时，应该考虑函数 $f(z)$的模在小圆 $|z|\leqslant r$ 内的一切值，其中就有值 $M(r)$，同样还应该考虑模在圆环 $r<|z|\leqslant r_1$ 中的值．这就意味着，$M(r_1)$或者大于 $M(r)$（如果在圆环中遇到 $|f(z)|$ 的值比 $M(r)$大时），或者等于 $M(r)$（如果在圆环中没有比 $M(r)$大的值）．这样一来，

$$若\quad r_1>r>0,\quad 则\quad M(r_1)\geqslant M(r). \qquad (35)$$

作为例子我们不难相信，上段中考虑过的那些函数的模的最大值是增长的．

我们已经求出，

$$M(r,\ e^z)=e^r,\quad M(r,\ \cos z)=\frac{e^r+e^{-r}}{2},$$

$$M(r,\ \sin z)=\frac{e^r-e^{-r}}{2}.$$

第一个的递增性是明显的，这是一个底大于 1 的指数函数．由于 e^r 是递增的，e^{-r} 是递减的，因此差 e^r-e^{-r} 是递增的，由此可导出最后一个函数 $\frac{e^r-e^{-r}}{2}$ 是递增的．为了检验函数 $\frac{e^r+e^{-r}}{2}$（在 $r>0$ 时）也是递增的，例如，我们可以求出它的导数．我们有

$$\left(\frac{e^r+e^{-r}}{2}\right)'=\frac{e^r-e^{-r}}{2}.$$

因为当 $r>0$ 时，它是正的，所以函数 $\frac{e^r+e^{-r}}{2}$ 在 $r>0$ 时事实上是递增的．图 1 上画出了函数

$$e^r,\ \frac{e^r+e^{-r}}{2},\ \frac{e^r-e^{-r}}{2}$$

的图象．

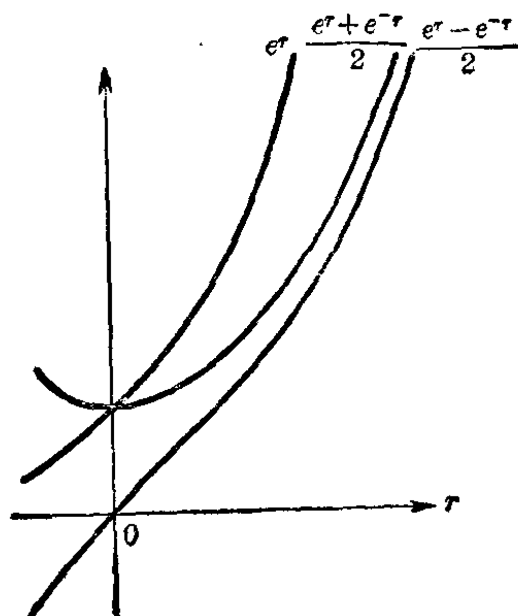


图 1

14．下面我们来证明法国十九世纪的数学家刘维尔的一个定理：

如果整函数 $f(z)$ 不恒等于常数，那末它的模的最大值 $M(r)$ 当 r 无限增大时趋向于无穷．

上面所研究的每一种情况：次数 $n\geqslant 1$ 的多项式，指数函数 e^z，三角函数 $\cos z$ 和 $\sin z$，这个定理是显然成立的．

例如，在次数 $n\geqslant 1$ 的多项式的情况下，我们看出，$\lim\limits_{r\to\infty}\frac{M(r)}{|a_n|r^n}=1$，因此，$M(r)$ 与 $|a_n|r^n$ 一样快地无限增大（我们认为 $a_n\neq 0$）．

函数 $M(r,\ e^z)$，$M(r,\ \cos z)$，$M(r,\ \sin z)$ 也无限增大．我们指出，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,\ e^z)}{e^r}=1,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{M(r,\ \cos z)}{\frac{1}{2}e^r}=1,$$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,\sin z)}{\frac{1}{2}e^r}=1.$$

换言之，在上述的每一种情况下，$M[r, f(r)]$都以 $\alpha\cdot e^r\left(\alpha=1\right.$ 或 $\left.\alpha=\frac{1}{2}\right)$的速度增长，也就是比 r 的任何次幂都增长得快；因为无论对怎样大的 n，都有 $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{r^n}{e^r}=0$. 这个极限式不难建立，用 e^r 的幂级数代替 e^r，并且除 r^{n+1} 那项外，抛弃其余所有的项，于是，当 $r\to+\infty$ 时，

$$\frac{r^n}{e^r}=\frac{r^n}{1+\frac{r}{1!}+\cdots+\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}+\cdots}$$

$$<\frac{r^n}{\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}}=\frac{(n+1)!}{r}\to 0.$$

现在我们转到刘维尔定理的证明. 设

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n+\cdots. \tag{36}$$

由柯西不等式(24)，

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n},$$

其中 $M(r)$是 $f(z)$在$|z|\leqslant r$ 内的最大模. 因 $M(r)$是 r 的非减函数(见13)，所以当 r 增加的时候或者它保持有界，即

$$M(r)\leqslant C,\quad 其中 C>0,$$

或者它趋向于 ∞.

我们假定定理不成立，也就是 $M(r)$有界，那末，对一切 $r>0$ 和 $n=0, 1, 2, \cdots$,

$$|a_n|\leqslant\frac{C}{r^n}.$$

不管 $n\geqslant1$ 多大，不等式的右边当 $r\to\infty$ 时，都趋于 0. 完成这个极限过程，并注意到左边与 r 无关，我们求出

$$|a_n|\leqslant0,$$

即当 $n \geqslant 1$ 时，$$a_n = 0,$$
这就意味着幂级数(36)只含有自由项，也就是

$$f(z) \equiv a_0.$$

我们看出，关于 $M(r)$ 有界(也就是 $|f(z)|$ 的有界性)的断言得出了 $f(z)$ 是常数的结论. 如果不是这样，非减函数 $M(r)$ 就不可能有界，即它一定无限增大.

15. 在前一段已经指出，n 次多项式模的最大值以 r^n(带有某一个正系数)的速度趋向于 ∞，而函数 e^z, $\cos z$, $\sin z$ 的模的最大值以比 r 无论多高的指数幂都快的速度趋向于 ∞. 原来下面的一般定理是正确的，这个定理可以看作是刘维尔定理的加强.

如果整函数 $f(z)$ 不是多项式，那末它的模的最大值的增长速度比任何多项式的模的最大值的增长速度快得不可比.

换言之，如果引进记号 $M(r, f)$ 表示 $f(z)$ 的模的最大值，用 $M(r, P)$ 表示任一多项式 $P(z)$ 的模的最大值，那末，总有

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M(r, P)}{M(r, f)} = 0 \tag{37}$$

(我们理解函数 $f(z)$ 自身不是多项式).

设

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots. \tag{38}$$

说 $f(z)$ 不是多项式，就是意味着说，级数(38)不会在任何一个 n 处中断，也就是有任意高次幂 z^n 的系数不为零. 设多项式 $P(z)$ 的幂是 m，b_m ($b_m \neq 0$) 是其最高次项的系数. 那末，对于固定的 $\varepsilon_0 > 0$，可以断言，

$$\text{当 } r > r_0 \text{ 时，} \quad M(r, P) \leqslant |b_m| r^m (1 + \varepsilon_0) \tag{39}$$

(见(29))；除此之外，还认为 $r > 1$.

在级数(36)中取系数不为零的项，并使其幂指数 p 比 m 大，也就是 $p\geqslant m+1$，$a_p\neq 0$. 由柯西不等式(24)

$$|a_p|\leqslant\frac{M(r,f)}{r^p},$$

由此导出

$$M(r,f)\geqslant|a_p|r^p\geqslant|a_p|r^{m+1}. \tag{40}$$

在 $r>r_0$ 和 $r>1$ 的条件下，由(39)和(40)得到

$$\frac{M(r,P)}{M(r,f)}\leqslant\frac{|b_m|r^m(1+\varepsilon_0)}{|a_p|r^{m+1}}=\frac{|b_m|(1+\varepsilon_0)}{|a_p|r}.$$

所以

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r,P)}{M(r,f)}=0, \tag{41}$$

这就是所要证明的. 因为当 $|z|=r$ 时，

$$|P(z)|\leqslant M(r,P),$$

所以

$$\frac{|P(z)|}{M(r,f)}\leqslant\frac{M(r,P)}{M(r,f)};$$

由此及(41)式得到

$$\lim_{r\to\infty}\frac{|P(z)|}{M(r,f)}=0\quad(|z|=r), \tag{42}$$

对任何多项式 $P(z)$ 都成立.

16. 我们运用 15 段的结果来证明函数 e^z, $\cos z$, $\sin z$ 以及其它非多项式的整函数的超越性.

我们记得，函数 $f(z)$ 如果恒满足形如

$$P_0(z)+P_1(z)f(z)+P_2(z)[f(z)]^2+\cdots+P_n(z)[f(z)]^n=0 \tag{43}$$

的方程，其中 $P_0, P_1, \cdots, P_n$ 是多项式，$n\geqslant 1$ 且 $P_n(z)\not\equiv 0$(这样写的意思是，或者 $P_n(z)$ 是幂次数不低于 1 的多项式，或者是非零常数)，那么这样的函数就称为代数函数.

不是代数函数的函数*就称为超越函数. 换言之, 说 $f(z)$ 是超越函数就意味着不存在任何形如(43)的方程(其系数满足上面指出的条件), 函数 $f(z)$ 恒满足它(对复变数 z 的一切值).

我们来证明定理:

如果整函数 $f(z)$ 不是多项式, 那末它就是超越的.

假设定理不真. 设 $f(z)$ 满足某个形如(43)的方程. 我们研究以坐标原点为中心, 以 1, 2, 3, …为半径的圆, 并在半径为 k 的每一个圆内取定一点 z_k, 使得在这一点函数的模达到它在这个圆内的最大值:

$$|f(z_k)|=M(k, f).$$

因为 $\lim\limits_{k\to\infty} M(k,f)=\infty$(根据刘维尔定理), 所以值 $|f(z_k)|$ 无限增大. 于是我们可以认为 $f(z_k)\neq 0$(至少对于足够大的 k 成立). 此外, 模 $|z_k|$ 也趋向于 ∞(在每一个半径是常数 R 的圆内, 函数的模是有界的, 所以使值 $|f(z_k)|$ 无限增大的点 z_k 从某一个 k 以后将不再属于这个圆). 现在在方程(43)中设 $z=z_k$, 并用 $[f(z_k)]^n$ 除所有的项. 我们得到

$$P_n(z_k)+\frac{P_{n-1}(z_k)}{f(z_k)}+\cdots+\frac{P_0(z_k)}{[f(z_k)]^n}=0. \tag{44}$$

当 $k\to\infty$ 时, $P_n(z_k)$ 将趋向于 ∞(如果这个多项式的幂次不低于 1), 或者保持常数(如果这个多项式是零次幂, 即是常数). 但是, 由于前段的结果(42), 左边的所有其它项都趋近于零. 事实上, 例如,

$$\left|\frac{P_{n-1}(z_k)}{f(z_k)}\right|\leqslant\frac{M(k, P_{n-1})}{M(k,f)}.$$

在一般情况下

* 这时只研究解析函数.

$$\left|\frac{P_{n-m}(z_k)}{[f(z_k)]^m}\right| \leqslant \frac{M(k, P_{n-m})}{M(k, f)} \cdot \frac{1}{[M(k,f)]^{m-1}} \quad (m \geqslant 1).$$

由(42)知，所有这些量都趋近于零(不要忘记，$M(k, f) \to \infty$)。我们得到一个明显的矛盾：在等式(44)中项 $P_n(z_k)$ 不能趋近于零，但同时由刚才所证的推出，它一定随其它项一起趋近于零。由这个矛盾就导出了定理的正确性。特别地，可以肯定，e^z, $\cos z$, $\sin z$ 都是超越函数。

17．由上面所说的一切可得，每一个超越整函数 $f(z)$ 可视为一种"无穷高次多项式"。

事实上，首先，在级数

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

中，我们可以碰到带有非零系数的 z 的任意高次幂的项。其次，这样的函数模的最大值 $M(r, f)$ 比任何高次多项式的模的最大值都增长得快。我们还将回顾对超越函数的这一看法，不过现在指出，不能把所有超越整函数归为一类，这样说是因为下面就指出，它们中一些模的最大值的增长比另一些模的最大值的增长快得不能比。

作为例子，我们来比较函数 e^z, e^{z^k}($k \geqslant 2$ 是自然数)和 e^{e^z} 的模的最大值。第一个模的最大值等于 e^r：

$$M(r, e^z) = e^r.$$

在指数函数的分解式(7)中以 z^k 代替 z 可以得到第二个函数的幂级数展开式，我们有

$$e^{z^k} = 1 + \frac{z^k}{1!} + \frac{z^{2k}}{2!} + \cdots + \frac{z^{nk}}{n!} + \cdots,$$

由此 $$|e^{z^k}| \leqslant 1 + \frac{|z|^k}{1!} + \frac{|z|^{2k}}{2!} + \cdots + \frac{|z|^{nk}}{n!} + \cdots.$$

因此，在圆 $|z| \leqslant r$ 内

$$|e^{z^k}|\leqslant 1+\frac{r^k}{1!}+\frac{r^{2k}}{2!}+\cdots+\frac{r^{nk}}{n!}+\cdots=e^{r^k}.$$

另一方面，在点 $z=r$, e^{z^k} 的值与 e^{r^k} 重合．由此推出，e^{r^k} 就是 e^{z^k} 在圆 $|z|\leqslant r$ 内的模的最大值：

$$M(r, e^{z^k})=e^{r^k}.$$

为了计算 e^{e^z}，可以在级数(7)中以 e^z 代替 z，我们有

$$e^{e^z}=1+\frac{e^z}{1!}+\frac{e^{2z}}{2!}+\frac{e^{3z}}{3!}+\cdots+\frac{e^{nz}}{n!}+\cdots$$

(这个级数不是幂级数，虽然可以用幂级数来代替它，办法是，利用公式(7)把每一项展成幂级数，而后按 z 的升幂再重新排列它的所有项)．注意到，在圆 $|z|\leqslant r$ 内 $|e^z|\leqslant e^r$，我们求得

$$|e^{e^z}|\leqslant 1+\frac{|e^z|}{1!}+\frac{|e^z|^2}{2!}+\cdots+\frac{|e^z|^n}{n!}+\cdots$$
$$\leqslant 1+\frac{e^r}{1!}+\frac{e^{2r}}{2!}+\cdots+\frac{e^{nr}}{n!}+\cdots=e^{e^r}.$$

另一方面，在点 $z=r$, e^{e^z} 的值与 e^{e^r} 重合．由此可得，e^{e^r} 是 e^{e^z} 在圆 $|z|\leqslant r$ 内的模的最大值：

$$M(r, e^{e^z})=e^{e^r}.$$

不出所料，当 $r\to\infty$ 时，所求出的函数 $M(r, e^z)$, $M(r, e^{z^k})$, $M(r, e^{e^z})$都趋向于 ∞ (刘维尔定理)．但是它们以不同的速度趋向于 ∞．例如，不难相信，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{e^r}{e^{r^2}}=0,\quad \lim_{r\to\infty}\frac{e^{r^2}}{e^{r^3}}=0,\ \cdots,$$
$$\lim_{r\to\infty}\frac{e^{r^k}}{e^{r^{k+1}}}=0,\ \cdots,\ \lim_{r\to\infty}\frac{e^{r^k}}{e^{e^r}}=0$$

(不管什么样的自然数 k 都成立)．由此可得，在超越整函数的序列

$$e^z,\ e^{z^2},\ e^{z^3},\ \cdots,\ e^{z^k},\ e^{z^{k+1}},\ \cdots$$

中，每个后面的模的最大值都比前一个增长得无限快，而函数

e^{e^z} 的模的最大值比序列中的任何一个都增长得无限快.

我们来证明，取 $M(r, e^z)=e^r$ 作为增长的标准尺度，可以用一个有限数来测量这些函数(除去函数 e^{e^z})中每一个的模的最大值的增长. 以此为目的，我们来看增长较慢的函数，先取模的最大值的对数.

我们得到序列

$$\ln M(r,\ e^z)=r,\ \ \ln M(r,\ e^{z^2})=r^2,\ \cdots,$$
$$\ln M(r,\ e^{z^k})=r^k,\ \ \ln M(r,\ e^{z^{k+1}})=r^{k+1},\ \cdots.$$

但是在这个序列中，每一个后面的函数还是比前面的增长得无限快，所以对它们再取一次对数. 我们得到序列

$$\ln\ln M(r, e^z)=\ln r,\ \ \ln\ln M(r, e^{z^2})=2\ln r,\ \cdots,$$
$$\ln\ln M(r, e^{z^k})=k\ln r,\ \cdots.$$

显然，任何两个函数的比是有限数. 我们作出下述的比:

$$\frac{\ln\ln M(r, e^{z^2})}{\ln\ln M(r, e^z)}=2,\quad \frac{\ln\ln M(r, e^{z^3})}{\ln\ln M(r, e^z)}=3,\ \cdots,$$
$$\frac{\ln\ln M(r, e^{z^k})}{\ln\ln M(r, e^z)}=k,\ \cdots.$$

因此说，函数 e^{z^2} 的级等于 2，函数 e^{z^3} 的级等于 3，…，一般地，函数 e^{z^k} 的级等于 $k(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$(意思指，函数的模的最大值关于 e^z 模的最大值增长的级). 自然地，函数 e^z(标准尺度)自身的级等于 1.

在函数 e^{e^z} 的情况下，我们有

$$\frac{\ln\ln M(r, e^{e^z})}{\ln\ln M(r, e^z)}=\frac{\ln\ln(e^{e^r})}{\ln r}=\frac{r}{\ln r}\to\infty,\ \text{当}\ r\to\infty\ \text{时}.$$

所以说，函数 e^{e^z} 的级等于 ∞. 一般说，当 $r\to\infty$ 时，$M(r,\ f)$ 取两次对数与 $M(r,\ e^z)$ 取两次对数的比的极限(如果它存在)

$$\rho=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r,\ f)}{\ln\ln M(r,\ e^z)}=\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r,\ f)}{\ln r},\qquad(45)$$

叫做整函数 $f(z)$ 的级.

如果当 $r\to\infty$ 时，$\dfrac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}$ 既没有有限极限，也没有无限极限，那末就取这个比*的上极限，并称它为函数 $f(z)$ 的级：

$$\rho=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}. \tag{45'}$$

18. 有了公式 (45) 就可借助公式 (33) 和 (34) 证明函数 $\cos z$ 和 $\sin z$ 的级都是 1. 事实上，

$$M(r,\cos z)=\frac{e^r+e^{-r}}{2}=e^r\cdot\frac{1+e^{-2r}}{2}.$$

显然，当 $r\to\infty$ 时，$e^{-2r}\to0$，所以等式右边的分数部分趋向于极限 $\dfrac{1}{2}$. 其次，取对数得到

$$\ln M(r,\cos z)=r+\ln\frac{1+e^{-2r}}{2}=r\left(1+\frac{\ln\dfrac{1+e^{-2r}}{2}}{r}\right),$$

当 $r\to\infty$ 时，式中括号部分趋向于 1. 再取一次对数给出，

$$\ln\ln M(r,\cos z)=\ln r+\ln\left(1+\frac{\ln\dfrac{1+e^{-2r}}{2}}{r}\right),$$

---

* 在一般情况下，设 $\varphi(r)$ 是任一个 r 的函数，定义在区间 $1<r<\infty$ 内，并且取实值，在我们的情况下，$\varphi(r)=\dfrac{\ln\ln M(r,f)}{\ln r}$. 如果存在 $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r)=a$（有限的或无限的），那末这时对任意一个序列 $\{r_n\}$，$r_n\to\infty$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(r_n)=a$. 但是，如果 $\lim\limits_{r\to\infty}\varphi(r)$ 不存在，那末至少可以求出两个序列 $\{r'_n\}$，$r'_n\to\infty$ 和 $\{r''_n\}$，$r''_n\to\infty$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(r'_n)\neq\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(r''_n)$. 我们来研究使 $\{\varphi(r_n)\}$ 有极限的一切可能的序列 $\{r_n\}$，$r_n\to\infty$，可以证明，在一切可能的极限中存在着一个最大的（有限的或者无限的）. 这个最大的极限就叫做当 $r\to\infty$ 时，$\varphi(r)$ 的上极限，并且记为 $\varlimsup\limits_{r\to\infty}\varphi(r)$.

当 $r\to\infty$ 时，右边第二项趋向于零．因此，

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r,\cos z)}{\ln r}$$

$$=\lim_{r\to\infty}\left[1+\frac{\ln\left(1+\frac{\ln\frac{1+e^{-2r}}{2}}{r}\right)}{\ln r}\right]=1.$$

这就是说，$\cos z$ 的级等于 1．类似地，借助于公式(34)我们可以求出 $\sin z$ 的级同样是 1．

在前面所研究过的全部例子中，整函数的级都是整数（或者等于无穷）．但是同样存在分数级的整函数．例如，我们看函数 $f(z)=\frac{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}{2}$．这个函数是整函数，因为

$$e^{\sqrt{z}}=1+\frac{\sqrt{z}}{1!}+\frac{z}{2!}+\frac{z\sqrt{z}}{3!}+\frac{z^2}{4!}+\cdots,$$

$$e^{-\sqrt{z}}=1-\frac{\sqrt{z}}{1!}+\frac{z}{2!}-\frac{z\sqrt{z}}{3!}+\frac{z^2}{4!}-\cdots,$$

所以我们的函数可表示为下面的处处收敛的幂级数：

$$\frac{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}{2}=1+\frac{z}{2!}+\frac{z^2}{4!}+\frac{z^3}{6!}+\cdots.$$

利用这个级数，象 12 段那样进行讨论，我们可求出，

$$M\left(r,\frac{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}{2}\right)=\frac{e^{\sqrt{r}}+e^{-\sqrt{r}}}{2}.$$

整函数 $\frac{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}{2}$ 的级等于 $\frac{1}{2}$，这一点现在读者自己已经可以验证了．

我们一般地研究任何正有理数 $\frac{p}{q}$，它不是整数（自然数 p 和 q 的最大公因数等于 1，并且 $q\geqslant 2$），并证明可以构造出初等整函数的例子 $\varphi(z)$，它的级等于 $\frac{p}{q}$．以此为目的，我们首先指出，复数

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{q}+i\sin\frac{2\pi}{q}$$

是 $\sqrt[q]{1}$ 的一个值；事实上，$\varepsilon^q=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$. $\sqrt[q]{1}$ 的其它 $q-1$ 个值可以认为是由 ε 的 2, 3, …, q 次幂得出的：

$$\varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \cdots,\ \varepsilon^q=1.$$

在图 2 上以图形的方式表示了 $\sqrt[q]{1}$ 的 q 个不同值.

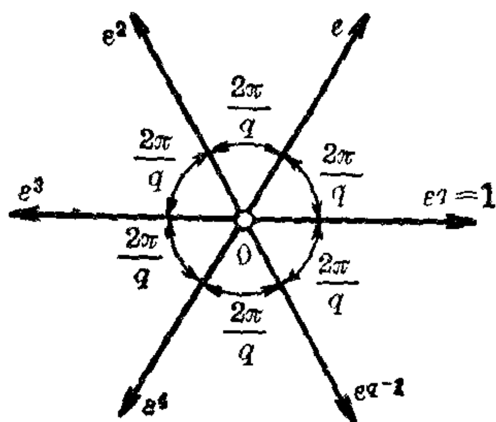


图 2

若 m 是任一自然数，它是 q 的倍数，即 $m=nq$，那末，

$$\begin{aligned}&\varepsilon^m+\varepsilon^{2m}+\cdots+\varepsilon^{qm}\\&=(\varepsilon^q)^n+(\varepsilon^q)^{2n}+\cdots\\&\quad+(\varepsilon^q)^{nq}=q.\end{aligned}\qquad(46)$$

若 m 不是 q 的倍数，那末，

$$\varepsilon^m+\varepsilon^{2m}+\cdots+\varepsilon^{qm}=\frac{\varepsilon^m-\varepsilon^{qm}\varepsilon^m}{1-\varepsilon^m}=0,\qquad(47)$$

因为在此式中分子为零，而分母不为零(事实上，$\varepsilon^{qm}=1$，而 $\varepsilon^m=\cos\left(\frac{2\pi}{q}m\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{q}m\right)$ 不等于 1，因为 $\frac{m}{q}$ 不是整数).

我们来研究下面 q 个级数：

$$e^{\varepsilon\sqrt[q]{z^p}}=1+\frac{\varepsilon z^{\frac{p}{q}}}{1!}+\frac{\varepsilon^2 z^{2\frac{p}{q}}}{2!}+\cdots+\frac{\varepsilon^q z^p}{q!}+\frac{\varepsilon^{q+1}z^{(q+1)\frac{p}{q}}}{(q+1)!}+\cdots,$$

$$e^{\varepsilon^2\sqrt[q]{z^p}}=1+\frac{\varepsilon^2 z^{\frac{p}{q}}}{1!}+\frac{\varepsilon^{2\cdot 2}z^{2\frac{p}{q}}}{2!}+\cdots+\frac{\varepsilon^{q\cdot 2}z^p}{q!}+\frac{\varepsilon^{(q+1)2}z^{(q+1)\frac{p}{q}}}{(q+1)!}+\cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned}e^{\varepsilon^q\sqrt[q]{z^p}}=1&+\frac{\varepsilon^q z^{\frac{p}{q}}}{1!}+\frac{\varepsilon^{q\cdot 2}z^{2\frac{p}{q}}}{2!}+\cdots\\&+\frac{\varepsilon^{q\cdot q}z^p}{q!}+\frac{\varepsilon^{(q+1)q}z^{(q+1)\frac{p}{q}}}{(q+1)!}+\cdots.\end{aligned}$$

逐项把它们加起来，我们得到

$$
\begin{aligned}
&e^{\varepsilon \sqrt[q]{z^p}}+e^{\varepsilon^2 \sqrt[q]{z^p}}+\cdots+e^{\varepsilon^q \sqrt[q]{z^p}} \\
&\quad =q+\frac{\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^q}{1!} z^{\frac{p}{q}}+\frac{\varepsilon^2+\varepsilon^{2\cdot 2}+\cdots+\varepsilon^{q\cdot 2}}{2!} z^{2\frac{p}{q}}+\cdots \\
&\qquad +\frac{\varepsilon^q+\varepsilon^{q\cdot 2}+\cdots+\varepsilon^{q\cdot q}}{q!} z^p \\
&\qquad +\frac{\varepsilon^{q+1}+\varepsilon^{(q+1)\cdot 2}+\cdots+\varepsilon^{(q+1)q}}{(q+1)!} z^{(q+1)\frac{p}{q}}+\cdots.
\end{aligned}
$$

由于公式 (47)，所有 z 的分数幂的系数都是零，而由于公式 (46)，所有 z 的整数幂的系数的分子都等于 q. 所以

$$
\begin{aligned}
&e^{\varepsilon \sqrt[q]{z^p}}+e^{\varepsilon^2 \sqrt[q]{z^p}}+\cdots+e^{\varepsilon^q \sqrt[q]{z^p}} \\
&\quad =q+\frac{q}{q!} z^p+\frac{q}{(2q)!} z^{2p}+\frac{q}{(3q)!} z^{3p}+\cdots.
\end{aligned}
$$

用 q 除等式两边，并用 $\varphi(z)$表示所得到的整函数. 我们就得出

$$
\begin{aligned}
\varphi(z)&=\frac{1}{q}\left\{e^{\varepsilon \sqrt[q]{z^p}}+e^{\varepsilon^2 \sqrt[q]{z^p}}+\cdots+e^{\varepsilon^q \sqrt[q]{z^p}}\right\} \\
&=1+\frac{z^p}{q!}+\frac{z^{2p}}{(2q)!}+\frac{z^{3p}}{(3q)!}+\cdots^{*}.
\end{aligned}
$$

借助我们不只用过一次的办法可以相信,

$$
\begin{aligned}
M(r,\ \varphi)&=1+\frac{r^p}{q!}+\frac{r^{2p}}{(2q)!}+\frac{r^{3p}}{(3q)!}+\cdots \\
&=\frac{1}{q}\left\{e^{\varepsilon r^{\frac{p}{q}}}+e^{\varepsilon^2 r^{\frac{p}{q}}}+\cdots+e^{\varepsilon^q r^{\frac{p}{q}}}\right\}.
\end{aligned}
$$

注意到 $\varepsilon^q=1$, 把 $M(r,\ \varphi)$改写为

$$
M(r,\varphi)=e^{r^{\frac{p}{q}}}\cdot\frac{1}{q}\left\{1+e^{(\varepsilon^{q-1}-1) r^{\frac{p}{q}}}+\cdots+e^{(\varepsilon^2-1) r^{\frac{p}{q}}}+e^{(\varepsilon-1) r^{\frac{p}{q}}}\right\}. \quad (48)
$$

其次,只要指出了上面和式中每一个形如

$$
e^{(\varepsilon^m-1) r^{\frac{p}{q}}},\quad 1\leqslant m\leqslant q-1
$$

的项当 $r\to\infty$ 时都趋近于零,我们就可采用计算函数 $\cos z$ 的级的办法了. 为了相信这一点，我们来计算这种项的模. 为此只要在指数中保

* 这里指出，我们需要带分指数的所有计算，是为了使得在左边指数函数的指数上看作 z 的分数次幂 $\frac{p}{q}$，而右边所有 z 的幂都是整数(否则函数本身就不是整函数了)。

留它的实部就够了(见 7 段末)．但是

$$
\begin{aligned}
(\varepsilon^m-1)r^{\frac{p}{q}}&=\left[\left(\cos\frac{2\pi}{q}+i\sin\frac{2\pi}{q}\right)^m-1\right]r^{\frac{p}{q}}\\
&=\left\{\left[\cos\left(m\frac{2\pi}{q}\right)-1\right]+i\sin\left(m\frac{2\pi}{q}\right)\right\}r^{\frac{p}{q}}\\
&=\left[\cos\left(m\frac{2\pi}{q}\right)-1\right]r^{\frac{p}{q}}+i\sin\left(m\frac{2\pi}{q}\right)r^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}
$$

(我们用了棣莫佛公式)．所以

$$
\left|e^{(\varepsilon^m-1)r^{\frac{p}{q}}}\right|=e^{\left[\cos\left(m\frac{2\pi}{q}\right)-1\right]r^{\frac{p}{q}}}. \tag{49}
$$

差 $\cos\left(m\frac{2\pi}{q}\right)-1$ 显然是负的，因为当 $1\leqslant m\leqslant q-1$ 时 $\cos\left(m\frac{2\pi}{q}\right)$严格地比 1 小．利用当 $r\to\infty$ 时 $r^{\frac{p}{q}}\to\infty$ 可推得，当 $r\to\infty$ 时，表达式(49)趋近于 0，这就意味着 $e^{(\varepsilon^m-1)r^{\frac{p}{q}}}$ 也趋近于 0．有了这个结果之后，我们就可得出，(48) 右边整个分数部分以 $\frac{1}{q}\neq 0$ 为极限． 这就使我们可能依据本段开始部分所指出的办法去做进一步的计算．

换言之，我们求出了

$$
\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r,\ \varphi)}{\ln r}=\frac{p}{q}.
$$

第 三 章

整函数的零点

19. 设 $f(z)$ 是一个不恒等于常数的整函数. 复平面上的点 a 叫做函数 $f(z)$ 的零点, 如果 $f(a)=0$. 换言之, 整函数的零点是方程

$$f(z)=0$$

的根.

如果

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots, \tag{50}$$

那末, 把 z 表示成 $z=a+(z-a)$, 按 $(z-a)$ 的幂展开 z^n:

$$\begin{aligned} z^n &= [a+(z-a)]^n \\ &= a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}(z-a) \\ &\quad +\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}(z-a)^2+\cdots+(z-a)^n, \end{aligned}$$

代入 (50), 把 $(z-a)$ 的同次幂的项合并起来, 我们就得到了按差 $z-a$ 的幂展开的 $f(z)$ 的处处收敛的幂级数:

$$\begin{aligned} f(z) &= c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots \\ &\quad +c_n(z-a)^n+\cdots. \end{aligned} \tag{51}$$

作为一个有益的练习, 我们建议读者对于特殊情况 $f(z)=e^z$ 来完成这个计算. 这时, 他一定得到

$$e^z=e^a+\frac{e^a}{1!}(z-a)+\frac{e^a}{2!}(z-a)^2+\cdots+\frac{e^a}{n!}(z-a)^n+\cdots.$$

当然, 这个结果是可以预见到的: 就是

$$e^z = e^a e^{z-a} = e^a\left[1+\frac{z-a}{1!}+\frac{(z-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{(z-a)^n}{n!}+\cdots\right].$$

在(51)中把 $z=a$ 代入,注意到条件 $f(a)=0$,我们得到

$$c_0=0.$$

这样一来,如果 a 是函数 $f(z)$ 的零点,那末在展式(51)中的自由项等于零.可能出现接着 c_0 的某几个系数也等于零(例如,$c_1=c_2=0$)的情况.但是级数(51)的系数不可能全为零,否则函数 $f(z)$ 将恒等于零,而我们从一开始就排除了这种可能.于是,在级数(51)的系数中一定会遇到第一个不为零的系数 c_k,

$$c_k\neq 0,\quad k\geqslant 1.$$

这个系数的号码 k(与差幂 $(z-a)^k$ 的指数相同)叫做零点的重数,或者同样地叫做零点重数的级,或者简单地,叫做零点的级.

于是,如果函数 $f(z)$ 的零点 a 的级是 k,那末

$$f(z)=c_k(z-a)^k+c_{k+1}(z-a)^{k+1}+\cdots,$$

$$c_k\neq 0,\quad k\geqslant 1. \tag{52}$$

以函数 $\sin z$ 作为例子

$$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots.$$

由这个展开式马上就可看出,坐标原点是 $\sin z$ 的一级零点.

我们现在研究函数 $z-\sin z$:

$$z-\sin z=\frac{z^3}{3!}-\frac{z^5}{5!}+\cdots.$$

显然,坐标原点是这个函数的3级零点.

20. 如果 a 是整函数 $f(z)$ 的 k 级零点,那末由公式(52)得出,$f(z)$ 可表示为形式

$$f(z)=(z-a)^k[c_k+c_{k+1}(z-a)+\cdots],\qquad (52')$$

这里 $c_k\neq 0$, $k\geqslant 1$. 因为级数(52′)对所有的 z 都收敛，所以(52′)式右边方括号中的级数也对所有的 z 都收敛(在 $z=a$ 它的收敛性是明显的;当 $z\neq a$ 时,它的收敛性可从收敛级数(52)的所有项遍乘数 $(z-a)^{-k}$ 而得到). 于是这个级数的和是一个整函数;我们用 $\varphi(z)$ 来表示这个级数:

$$\varphi(z)=c_k+c_{k+1}(z-a)+\cdots.$$

因为 $\varphi(a)=c_k\neq 0$, 所以点 a 不是 $\varphi(z)$ 的零点. 这样一来,我们得到了定理:

如果 a 是整函数 $f(z)$ 的 k 级零点, 那末 $f(z)$ 可以表示成如下形式:

$$f(z)=(z-a)^k\varphi(z),\qquad (53)$$

这里 $\varphi(z)$ 仍是一个整函数, 点 $z=a$ 不再是它的零点了.

我们来考察 $f(z)$ 是次数不低 1 的 n 次多项式的情况:

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n,\quad a_n\neq 0.\qquad (50')$$

在这种情况下，正象在第 19 段开始所指出的那样，把它依 $z-a$ 的幂展开，在 $f(z)$ 的这一展式中 $z-a$ 的最高次幂是 n, 并且它的系数与 a_n 重合:

$$f(z)=c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n,\quad c_n=a_n\neq 0.\qquad (51')$$

若 a 是 $f(z)$ 的零点, 且零点的级为 $k(0\leqslant k\leqslant n)$, 那末这一公式就取下面的形式:

$$f(z)=c_k(z-a)^k+c_{k+1}(z-a)^{k+1}+\cdots+c_n(z-a)^n,$$

这里 $c_k\neq 0(1\leqslant k\leqslant n)$ 及 $c_n=a_n\neq 0$; 由此可得

$$f(z)=(z-a)^k[c_k+c_{k+1}(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^{n-k}].$$

与一般公式(53)相比较，我们看到了，当 $f(z)$ 是 n 次多项式时, 整函数 $\varphi(z)$ 同样是多项式, 次数为 $0\leqslant n-k<n$. 这个多项式在 $z=a$ 不为零; $z-a$ 的最高次幂的系数等于 a_n.

由上面所得到的结果可导出著名的贝儒定理的下述形式：

如果 $f(z)$ 是多项式，$z=a$ 是它的 k 级零点，那末 $f(z)$ 可为 $(z-a)^k$ 除尽.

我们转向整函数 $f(z)$ 的一般情况，在特殊情况下 $f(z)$ 还可以是多项式.

设 $b\neq a$ 是函数 $f(z)$ 的 l 级零点. 由公式(53)可得，点 b 将同样是函数 $\varphi(z)$ 的零点. 事实上，

$$f(b)=(b-a)^k\varphi(b)=0,$$

因为 $b-a\neq 0$，所以 $\varphi(b)=0$.

我们来证明，b 同样是函数 $\varphi(z)$ 的 l 级零点. 假如不是这样，b 作为 $\varphi(z)$ 的零点不是 l 级的，而是 l_1 级的，l_1 不等于 l，例如 $l_1<l$. 这时我们有

$$f(z)=(z-b)^l\psi(z) \quad \text{和} \quad \varphi(z)=(z-b)^{l_1}\psi_1(z),$$

这里 $\psi(z)$ 和 $\psi_1(z)$ 是整函数，点 b 不是它们的零点. 由公式(53)可推出，

$$(z-b)^l\psi(z)=(z-a)^k(z-b)^{l_1}\psi_1(z),$$

由此约掉 $(z-b)^{l_1}$（我们已假定 $l_1<l$）得到

$$(z-b)^{l-l_1}\psi(z)=(z-a)^k\psi_1(z) \tag{53'}$$

严格说，这个关系式仅对 $z\neq b$ 是合理的；但是因为左右两边都是 b 的连续函数，所以对 $z=b$ 也成立. 令 $z=b$，则左边等于零，而右边是数 $(b-a)^k\psi_1(b)\neq 0$. 由这个矛盾可得出，$l_1<l$ 的假设是不正确的. 同理可信，假设 $l_1>l$ 也不正确. 这样一来，$l_1=l$.

我们证明了，函数 $f(z)$ 每一个异于 a 的零点是 $\varphi(z)$ 的同级零点. 由公式(53)同样得出，每一个 $\varphi(z)$ 的零点一定是

$f(z)$的零点. 所以公式(53)中的函数 $\varphi(z)$与函数 $f(z)$有相同的零点，并且级数也相同，但要除去一个例外点 a，a不是 $\varphi(z)$的零点.

把所得结果运用到函数 $\varphi(z)$和函数 $f(z)$的一个 l 级零点 $b\neq a$ 上，我们得出，

$$\varphi(z)=(z-b)^l\psi(z), \tag{54}$$

这里 $\psi(z)$是整函数，除去点 b 不是 $\psi(z)$的零点外，它与 $\varphi(z)$具有相同级数的零点. 因此与 $f(z)$比较就知道，除去 a 和 b 两点之外，$\psi(z)$与 $f(z)$有相同的零点.

由公式(53)和(54)得出：

$$f(z)=(z-a)^k(z-b)^l\psi(z). \tag{55}$$

继续这个讨论(可以进一步用归纳法)，我们得到下面的结果：

若 $a, b, \cdots, c$ 是 $f(z)$的零点，彼此不相等，它们相应的级分别是 $k, l, \cdots, m$，那末 $f(z)$可以表示成下述形式：

$$f(z)=(z-a)^k(z-b)^l\cdots(z-c)^m\omega(z), \tag{56}$$

这里 $\omega(z)$是一个整函数，除去点 $a, b, \cdots, c$ 不是 $\omega(z)$的零点外，$\omega(z)$与 $f(z)$有相同级数的零点.

当点 $a, b, \cdots, c$ 是 $f(z)$的全部零点时，这是一个很重要的特殊情况；这意味着 $f(z)$ 在全平面上只有有限个零点. 这时整函数 $\omega(z)$ 恒不为零，按第 9 段可将它表示为下述形式：

$$\omega(z)=e^{g(z)},$$

这里 $g(z)$是整函数.

我们得到了下面的定理：

如果整函数 $f(z)$在全平面上只有有限个零点 $a, b, \cdots, c$,

自然数 $k, l, \cdots, m$ 是这些零点的级，那末函数 $f(z)$ 可以表示成

$$f(z)=(z-a)^{k}(z-b)^{l}\cdots(z-c)^{m}e^{g(z)} \tag{57}$$

的形式，这里 $g(z)$ 是整函数.

注意到 $(z-a)^{k}(z-b)^{l}\cdots(z-c)^{m}$ 是一个次数为 $k+l+\cdots+m=n$ 的多项式，就可推出，每一个在全平面只有有限个零点的整函数等于某个多项式与形如 $e^{g(z)}$ 的函数的乘积，这里 $g(z)$ 是整函数.

当函数 $f(z)$ 本身是 n 次多项式时，公式(56)中的 $\omega(z)$ 也是多项式. 如果 $a, b, \cdots, c$ 是 $f(z)$ 的全部零点，那末 $\omega(z)$ 就是没有零点的多项式. 由高等代数的基本定理(我们将在后面第 22 段证明它)可知，$\omega(z)$ 不会是次数 $\geqslant 1$ 的多项式，因为那样的多项式有零点. 所以 $\omega(z)$ 的次数为零，即 $\omega(z)$ 是常数. 由此进一步推出，$f(z)$ 的所有零点的级的和等于 n：

$$k+l+\cdots+m=n,$$

和

$$\omega(z)=a_n.$$

所以多项式的展式(57)取已知形式：

$$f(z)=a_n(z-a)^{k}(z-b)^{l}\cdots(z-c)^{m}.$$

21. 为了对含有无穷多零点的整函数作出某些结论，我们来证明下面的引理：

若 $f(z)$ 是一个不恒为零的整函数，那末对于平面上的每一个点 z_0 可以指出一个以这个点为中心的圆，在这个圆内除去 z_0 本身可能是零点外，它没有其它零点.

首先设 $f(z_0)\neq 0$，这时 $|f(z_0)|$ 是一个正数. 由于函数 $f(z)$ 的连续性(它的连续性由函数的可微性导出)，对每一个 $\varepsilon>0$，都存在着一个以 z_0 为中心的圆，在这个圆内不等式

$$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$$

成立，特别地，

$$|f(z)|=|f(z_0)+[f(z)-f(z_0)]|$$
$$\geqslant|f(z_0)|-|f(z)-f(z_0)|>|f(z_0)|-\varepsilon.$$

取 $\varepsilon=|f(z_0)|$，这时在相应的圆内

$$|f(z)|>|f(z_0)|-|f(z_0)|=0$$

或
$$|f(z)|>0,$$

即
$$f(z)\neq 0.$$

于是，当 $f(z_0)\neq 0$ 时，存在一个以 z_0 为中心的圆，在这个圆内函数没有零点。

今设 $f(z_0)=0$, k 是 z_0 的级，这时（见第 20 段）

$$f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z),$$

这里 $\varphi(z)$ 是整函数，z_0 不再是它的零点。根据刚才所证明的，存在一个以 z_0 为中心的圆，在这个圆内 $\varphi(z)$ 不为零。显然在这个圆内除去 z_0 外 $f(z)$ 没有其它零点。引理得证。

由这个引理得到定理：

不恒等于零的整函数 $f(z)$ 在任何有限半径的圆内不可能有无穷多个零点。

我们假定不是这样，设在圆 $|z|\leqslant r$ 内函数 $f(z)$ 有无穷多个零点。这时根据著名的波尔察诺-维尔斯特拉斯定理（例如见格·马·菲赫金哥尔茨著《数学分析原理》中译本 p.256），在圆的内部或者在边界上一定存在一点 z_0，它是零点集的极限点。这就意味着，在以 z_0 为中心的任何圆的内部包含 $f(z)$ 的无穷多个零点，这显然与刚才所证的引理相矛盾。

作为推论，我们得到了整函数的唯一性定理：

如果两个整函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的值在任一个具有有限半

径的圆K内的一个无穷点集上重合，那末这两个函数彼此恒等：

$$f(z)\equiv g(z).$$

事实上，差 $f(z)-g(z)=\varphi(z)$是整函数，它在满足$f(z)=g(z)$的点上取零值．如果假定$\varphi(z)\not\equiv 0$，那末就会得到一个与刚才所证的定理相矛盾的结论．所以$\varphi(z)\equiv 0$，也就是$f(z)\equiv g(z)$．

特别地，如果在圆K的一个无穷点集上$f(z)$取同一个值A，那末$f(z)\equiv A$（只要把刚才所证明的定理用于$f(z)$和$g(z)=A$就可以了）．

我们回到整函数$f(z)\not\equiv 0$的情况．没有什么东西妨碍它在整个复平面上有无穷多个零点．例如，π的每一整数倍

$$n\pi,\quad n=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,\quad \cdots$$

都是$\sin z$的零点．

我们假定$f(z)$在整个平面上有无穷多个零点，并研究以坐标原点为中心半径分别等于1，2，3，…的圆．根据前面所讲的，这些圆中的每一个只包含$f(z)$的有限个零点．这就使我们有可能把$f(z)$的所有零点无例外地都编上号，既不允许重复也不允许漏掉．这是能够做到的．首先把$|z|\leqslant 1$内所有的零点以任一种顺序（例如以模不减的顺序）编上号．设这些号码中没有用到的第一个数是$k_1\geqslant 1$（因此，在圆$|z|\leqslant 1$内可以找到函数的k_1-1个彼此不同的零点）．接着从k_1开始，继续对属于圆$|z|=1$和$|z|=2$所围成的圆环（精确地说，圆环$1<|z|\leqslant 2$）中的零点进行编号，设在这些号码中没有用到的第一个数是k_2．然后转向圆环$2<|z|\leqslant 3$，从k_2开始继续对其中的零点进行编号，重复这一步骤直到无穷．从上面的讨论可以导出，当整函数$f(z)$在平面上有无穷多个零点时，

对这些零点进行编号，例如以模不减的顺序

$$|z_1| \leqslant |z_2| \leqslant \cdots \leqslant |z_n| \leqslant |z_{n+1}| \leqslant \cdots$$

进行编号后，所有这些零点就可排成一个序列

$$z_1, \ z_2, \ z_3, \ \cdots, \ z_n, \ \cdots.$$

序列 $\{z_n\}$ 的极限等于 ∞:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty.$$

第 四 章

高等代数基本定理和毕卡小定理

22. 在第 14 段证明的刘维尔定理使我们可以较简单地建立所谓高等代数基本定理:

方程

$$a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n=0,\quad 这里\ n\geqslant 1,\ a_n\neq 0, \tag{58}$$

至少有一个复数根.

显然,在这个定理中谈的是关于 $n\geqslant 1$ 次多项式的最一般和最重要的性质. 设 $P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$,我们用反证法来证明这个定理. 假如定理不真,那末 $P_n(z)$ 在复平面上处处不为零. 函数 $f(z)=\dfrac{1}{P_n(z)}$ 作为两个整函数的商,而且分母不为 0,所以它一定是整函数(见第 5 段). 显然它不是常数,因为它的分母是变化的,并且当 z 趋向于 ∞ 时分母趋向于 ∞(例如,这一事实可从公式(27)导出;公式(27)对适合条件的平面上的任何点 z_0 和任一 $n\geqslant 1$ 次多项式成立). 根据刘维尔定理,这种函数的最大模 $M(r, f)$ 一定随 r 趋向 ∞ 而趋向于 ∞. 但是这与函数本身趋向于零相矛盾(因为分数 $\dfrac{1}{P_n(z)}$ 的分母趋向于 ∞,而分子保持常数). 从这个矛盾就得到定理是正确的.

我们认为方程(58)的每个根取几次就是它的几重根. 现在可以断言,方程(58)的全部根数与多项式 $f(z)$ 的次数相等:

$$k+l+\cdots+m=n.$$

(见第 20 段的末尾.)

23. 在第 17 段里我们主张把超越整函数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots \tag{59}$$

看作一种无穷高次多项式. 现在到了审查一下这种看法的根据何在的时候了. 如果这种类似确实存在的话, 那末, "无穷高次"方程

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots=0 \tag{60}$$

一定有无穷多个根. 但一开始就是失望等着我们. 方程

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=0, \tag{61}$$

也就是 $e^z=0$, 正如在第 7 段所指出的, 一个根也没有. 这个命题可用一个不大的折衷办法来挽救. 我们回到 $n\geqslant1$ 次多项式 $P_n(z)$ 的情况, 代替方程 (58) 我们来考虑一个形式更一般的方程

$$a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n=A, \tag{58'}$$

这里 A 是任意一个复数. 显然, 它仍是 n 次方程; 因为它可以化为形如

$$Q_n(z)=0$$

的方程, 这里 $Q_n(z)=P_n(z)-A$. 于是方程 (58′) 对任何 A 都有和方程次数相同的个数的根, 也就是 n 个根.

对应于 (58) 到 (58′) 的过渡, 代替 (61) 我们考虑更一般的方程

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots=A \quad 或 \quad e^z=A, \tag{61'}$$

其中 A 是任意复数.

在第 8 段我们已经证明了, 这个方程对任何的 $A\neq0$ 有

无穷多个根，也就是，有方程的次数(∞)那么多的根. 因此，在多项式和超越整函数(在现在的情况下是 e^z)之间的类似对所有的 A 保持，但要除去一个例外值.

代替方程(61′)我们现在研究方程

$$\cos z=A. \tag{62}$$

用欧拉公式(16)替换 $\cos z$，我们得到

$$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=A,$$

注意到 $e^{-iz}=\frac{1}{e^{iz}}$，并做适当变形，就有

$$e^{2iz}-2Ae^{iz}+1=0. \tag{63}$$

这里若设

$$e^{iz}=w, \tag{64}$$

那末这个方程就化成了二次方程

$$w^2-2Aw+1=0,$$

由此

$$w=A+\sqrt{A^2-1}=A+i\sqrt{1-A^2} \tag{65}$$

(在根式前我们不写双重符号是为了强调二次方程的根必须看成两个). 从 w 出发，为了求出方程(62)的根就必须解方程(64). 我们已经知道了，只要 $w\neq 0$，就有无穷多个指数 iz(因此，也就有无穷多个 z)的值满足这个方程，即

$$iz=\operatorname{Ln} w,\ z=-i\operatorname{Ln} w=-i\operatorname{Ln}(A+i\sqrt{1-A^2}). \tag{66}$$

但是由公式(65)可推出，若 $w=0$，就有 $i\sqrt{1-A^2}=-A$，由此 $A^2-1=A^2$，这是不可能的. 这样一来，对于不管怎样的 A，由公式(65)所确定的 w 值都不为零. 所以方程(64)，因此也有方程(62)，对任何的 A(**没有任何例外**)都有无穷多个根.

24. 原来在方程

$$e^z=A \quad 和 \quad \cos z=A$$

中所发现的规律性对一切超越整函数具有普遍意义．这就是法国数学家毕卡早在1878年就证明了的下述的著名定理．

毕卡小定理 如果$f(z)$是一个超越整函数，那末方程

$$f(z)=A \tag{67}$$

有无穷多个根，这里A是任意一复数，可能除去A的一个例外值（这个值依赖于函数），对这个值方程可以只有有限个根（甚至一个根也没有）．

对于函数e^z，那样的例外值是$A=0$；函数$\cos z$没有任何例外值．可以验证，函数$\sin z$也没有例外值，即方程

$$\sin z=A$$

对任何复数A都有无穷多个根．

现在我们看到了，必须做怎样的折衷才能把超越整函数看作无穷高次多项式．这就是对给定的函数只允许一个可能的例外值，对这个值方程(67)的根数可以与这个方程的"次数"（等于无穷）不一致．

毕卡也得到了上面定理的不同形式的叙述和强化．下面就是其中之一．

如果函数$f(z)$的级是有限的，且不是整数，那末方程(67)对于一切A（没有任何例外）都有无穷多个根．

例如在第18段曾指出过，$\dfrac{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}{2}$就是这样的整函数，它的级等于$\dfrac{1}{2}$．所以可以肯定，方程

$$\frac{e^{\sqrt{z}}+e^{-\sqrt{z}}}{2}=A \tag{68}$$

对任何复数A都有无穷多个根．但是，在已给的这种情况下不必引用一般定理就可相信它．这个方程可以化为我们在上面已经研究过的方程$\cos z=A$的情况．事实上，引进新的变

量 ζ 去替代 z，设

$$\sqrt{z}=i\zeta,$$

这时方程(68)取形式

$$\frac{e^{i\zeta}+e^{-i\zeta}}{2}=A \quad \text{或} \quad \cos\zeta=A.$$

而这个方程对任何 A 都有无穷多个根(见第 23 段). 这些根 ζ 中的每一个都对应于方程(68)的根 $z=(i\zeta)^2=-\zeta^2$.

25. 在中学教科书中用图形解的超越方程的例子中主要是下面几种类型：

$$a^x=Ax,\ \ a^x=Ax^2,\ \ \sin x=Ax$$

等等.

在这些方程中，左边是超越整函数，而右边是多项式(给出的例子是 x 或 x^2)乘以某个常数 A. 显然，这些方程中的每一个都可概括地用形如

$$f(z)=AP(z) \tag{69}$$

的方程表示，这里 $f(z)$ 是超越整函数，而 $P(z)$ 是多项式.

对每一个给定的 A，第 24 段的定理不能判断方程(69)的根的个数. 把这个方程写成

$$f(z)-AP(z)=0,$$

我们看到了，问题在于寻求整函数的零点. 但是可能出现右边的数 0 恰是函数 $f(z)-AP(z)$ 的例外值的情况，这时方程(69)就只有有限个根.

下面的定理指出了形如(69)的方程的根的实际情况如何：

如果 $f(z)$ 是一个超越整函数，$P(z)$ 是一个不恒等于零的多项式，那末，对所有的 A 值，可能除去一个例外值，方程(69)有无穷多个根(可能的例外值依赖于 $f(z)$ 和 $P(z)$).

若设 $P(z)=1$，则毕卡小定理(见第 24 段)就作为这个定

理的特殊情况而得到．所以，如果证明了本段的这一定理，毕卡定理的正确性就建立了．附录(§1)中给出了证明，但是加了函数$f(z)$的级是有限数这个条件．同时也证明了当$f(z)$的级是分数时不存在A的例外值．

我们把这个定理应用于本段开始指出的特殊情况中去．

我们指出，不失一般性，可以认为指数函数的底$a(a\neq1)$等于e．事实上，若$a\neq e$，那末令$a=e^{\ln a}$，就把方程$a^x=Ax$表示成了$e^{x\ln a}=Ax$的形式．引进新的自变数$x_1=x\ln a$，方程就化为下述形式了：

$$e^{x_1}=\frac{A}{\ln a}x_1=A_1x_1.$$

例如，方程$2^x=2x$可以表示为$e^{x_1}=\frac{2}{\ln 2}x_1$的形式．

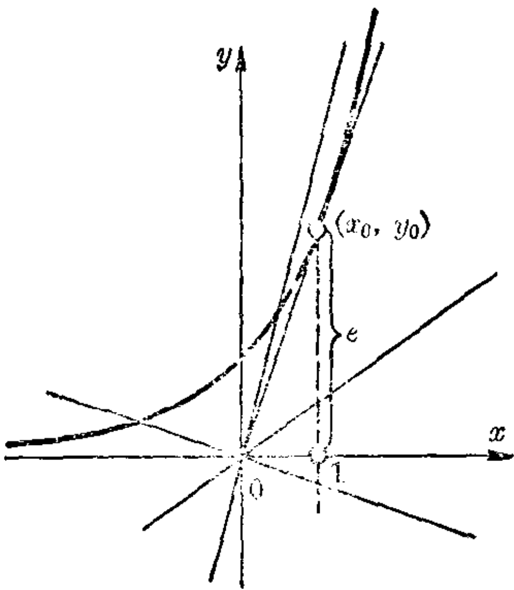


图 3

这样一来，我们研究方程

$$e^z=Az, \tag{70}$$

而且在开始我们认为A是实数，并且也只求实根．从坐标原点引曲线$y=e^x$的切线(见图3)．如果$(x_0,\ y_0)$是切点，那末切线方程是

$$y-y_0=y_0'(x-x_0),$$

这里$y_0=e^{x_0}$，$y_0'=\left.\frac{de^x}{dx}\right|_{x=x_0}=e^{x_0}$．记着切线经过坐标原点$(0,\ 0)$，我们得到，$-y_0=-y_0'x_0$，即$e^{x_0}=e^{x_0}x_0$，或$x_0=1$，$y_0=e^{x_0}=e$，也就是切线的斜率等于$e$．借助于图3可以确信，当$0\leqslant A<e$时，直线$y=Ax$与曲线$y=e^x$没有公共点，也就是方

程(70)没有实根．当 $A<0$ 时，方程只有一个实根．最后，当 $A\geqslant e$ 时，它有两个（且仅有两个）实根，当 $A=e$ 时（切线情况），看作是一个重根*．当 A 是实数时方程(70)的实根就这几种情况．

为了说明虚根存在将不再要求 A 是实数．当 $A=0$ 时，正如我们所知道的，方程(70)完全没有根．根据本段的定理，不可能有其它例外值，因此，对任何 $A\neq 0$，方程(70)有无穷多个复根．

关于方程

$$\sin z=Az \tag{71}$$

的根的个数问题，所以复杂一些，是因为在方程(70)的情况下，一望而知 $A=0$ 是例外值．而在已给的情况下是否存在例外值是不清楚的．

我们把 A 当作实数．在 $A=0$ 时，方程取形式

$$\sin z=0;$$

它有无穷多个实根 $z=n\pi$（这里 $n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$），而没有一个虚根（可用表达 $\sin z$ 的欧拉公式 (16) 来检验）．如果 $A\neq 0$，那末直线 $y=Ax$ 与正弦曲线 $y=\sin x$ 只有有限个交点，并且不管 A 怎样取至少有一个交点——原点．

因此，当 A 是实数且 $A\neq 0$ 时，方程(71)有有限个实根（不少于一个）．为了说明一般的根数问题（既有实的也有虚的），我们认为 A 是任意复数．把方程(71)写成形式

$$\frac{\sin z}{z}=A. \tag{71'}$$

---

* 实根不超过两个的理由如下：曲线 $y=e^x$ 是凸的（下凸），所以直线不可能与它在多于两点处相交．另一方面，直线 $y=Ax$ 在与曲线第一次相交后，不可能一直与曲线相重合（因为 e^x 比 Ax 增长得快）；所以一定是两个交点．

同时我们可以舍去方程(71)的一个(仅仅一个)根，即等于零的那个根. 函数 $\frac{\sin z}{z}$ 是一个超越整函数,因为

$$\frac{\sin z}{z}=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\frac{z^6}{7!}+\cdots$$

是一个处处收敛的幂级数. 不难相信它的级是1. 作变量替换 $z=\sqrt{\zeta}$,它就变为整函数

$$\frac{\sin\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}=1-\frac{\zeta}{3!}+\frac{\zeta^2}{5!}-\frac{\zeta^3}{7!}+\frac{\zeta^4}{9!}-\cdots,$$

它的级是分数 $\frac{1}{2}$. 因此,对于方程

$$\frac{\sin\sqrt{\zeta}}{\sqrt{\zeta}}=A \tag{71''}$$

可以应用上段指出的毕卡定理. 由此可得,方程(71″)对任何的 A 都有无穷多根,所以方程(71′)也有无穷多个根 $z=\sqrt{\zeta_0}$. 最后得到结论，对任何的 A 方程(71)都有无穷多个根，即这里不存在例外值. 在 $A\neq 0$ 的条件下，除去有限个根外都是虚根.

26. 在上一段里我们研究了形如 $f(z)=AP(z)$ 的方程，其中 $f(z)$ 是超越整函数, $P(z)$ 是多项式, A 是复常数.

最后,我们研究方程

$$f(z)=Ag(z), \tag{72}$$

其中 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是不同的超越整函数. 譬如, 我们可以研究方程 $\operatorname{tg} z=A$, 它可以写成形式 $\sin z=A\cos z$; 也可以研究方程 $e^z=A\sin z$, 等等.

下面的定理是正确的:

如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个超越整函数，它们的比不是有理

函数(即,假定 $\frac{f(z)}{g(z)} \neq \frac{P(z)}{Q(z)}$, 这里 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 是多项式),那末方程(72)对任何复数 A 都有无穷多个根,但可能除去两个例外值,对于这两个值方程可能只有有限个根(也可能根本没有根).

如果我们利用本身就很重要的亚纯函数的概念,那末这一结果可以表达得更简单. 函数 $\varphi(z)$ 称为亚纯函数,如果它可以表示为两个整函数的商:

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

特别地,有理函数,也就是可以表示为两个多项式的商的函数是亚纯函数. 可以证明,每一个非有理函数的亚纯函数也不可能是代数函数,因而是超越函数. 例如

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z},$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z}, \quad \frac{1}{e^z - 1}$$

等等,是超越亚纯函数的例子.

特别地,由亚纯函数的定义可知,每一个整函数 $f(z)$ 也同样是亚纯函数,因为它可以表示成比

$$f(z) = \frac{f(z)}{1}.$$

显然,这一段的基本定理所谈的是关于形如

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{g(z)} = A$$

的方程的根的问题,这里 $\varphi(z)$ 是一个(非有理函数的)亚纯函数.

所以这个定理可以简单地叙述如下:

如果 $\varphi(z)$ 是一个超越亚纯函数,那末方程

$$\varphi(z)=A$$

对于每一个 A 的值，除去两个可能的例外值，有无穷多个解。

取最简单的方程

$$\operatorname{tg} z=A \tag{73}$$

作为例子，我们来证明，两个例外值的确是可能的. 事实上，根据定义，$\operatorname{tg} z$ 等于 $\frac{\sin z}{\cos z}$. 把方程改写为 $\sin z=A\cos z$，并用欧拉公式(16)代替 $\sin z$ 与 $\cos z$，我们得到

$$\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=A\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2},$$

由此有 $$(1-Ai)e^{iz}=(1+Ai)e^{-iz}.$$

两边乘 e^{iz}(这是一个不为零的数)，方程化为

$$(1-Ai)e^{2iz}=1+Ai. \tag{73'}$$

如果 $A=i$，那末方程取形式

$$2e^{2iz}=0 \quad 或 \quad e^{2iz}=0.$$

我们知道，它没有根. 所以方程(73)在 $A=i$ 时也没有根.

如果 $A=-i$，那末方程(73′)取形式

$$0\cdot e^{2iz}=2,$$

显然，这也没有根. 所以方程(73)在 $A=-i$ 时也没有根.

这样一来，我们获得了方程(73)的两个例外值 $+i$ 和 $-i$. 由本段定理知道，再没有 A 的其它例外值了. 事实上，设 $A\neq\pm i$，这时方程(73′)可以表成形式

$$e^{2iz}=B, \tag{73''}$$

这里 $B=\frac{1+Ai}{1-Ai}\neq 0$. 化为对数，我们得到

$$2iz=\operatorname{Ln} B,$$

由此得 $$z=\frac{1}{2i}\operatorname{Ln} B,$$

或者

$$z=\frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+Ai}{1-Ai}. \tag{74}$$

这个公式中包含着方程(73)的无穷多个根.

例如设 $A=1$,所讨论的就是关于最简单的方程

$$\mathrm{tg}\,z=1$$

的解的问题. 根据公式(74)我们有

$$z=\frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{1+i}{1-i}=\frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$

$$=\frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,\frac{2i}{2}=\frac{1}{2i}\,\mathrm{Ln}\,i.$$

但是,根据公式(22′)

$$\mathrm{Ln}\,i=\ln|i|+i(\arg i+2n\pi)=\ln 1+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$$

$$=i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right),\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

最后我们得到

$$z=\frac{1}{2i}\,i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)$$

$$=\frac{\pi}{4}+n\pi,\ n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots.$$

方程 $\mathrm{tg}\,z=1$ 的所有这些根都是初等数学中已经知道了的.但是,从我们的计算中并没有得出更多的根,也就是这个方程没有虚根.

27. 在我们的问题中不包括实际地计算方程的根的方法.这些问题在近似计算的书中研究*. 我们仅限于举一个例子:求方程

$$e^z=Az\quad (A\neq 0) \tag{70}$$

的根的渐近值,也就是,引出一个求根的近似公式,使得根的

* 例如见 В. П. 吉米多维奇和 И. А. 马龙,《计算数学基础》第四章.

模越大越精确.

在第 25 段我们已经指出，当 $A\neq 0$ 时方程(70)有无穷多个根. 我们还指出了，对于每一个 A，所有这些根都可排成一个趋向于 ∞ 的序列(见第 21 段). 为简单起见，我们认为 A 是正实数. 这时对方程(70)的任何根 $z=x+iy$ 有

$$|e^z|=A|z|,$$

或者

$$e^x=A\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (70')$$

但根的模趋向于 ∞

$$(|z|=\sqrt{x^2+y^2}\to+\infty),$$

所以 $e^x\to+\infty$，也就是 $x\to+\infty$. 把(70′)改写为

$$\left(\frac{y}{e^x}\right)^2=\frac{1}{A^2}-\left(\frac{x}{e^x}\right)^2, \qquad (70'')$$

并注意到，当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{x}{e^x}\to 0$. 我们断言，$\frac{|y|}{e^x}\to\frac{1}{A}$，也就是关于方程(70)的根的实部和虚部的渐近公式

$$|y|\approx\frac{1}{A}e^x\,*$$

成立. 把根的值 $z=x+iy$ 代入(70)，我们有

$$e^{x+iy}=A(x+iy),$$

或者 $$e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=A(x+iy),$$

由此比较实部和虚部，我们得到

$$e^x\cos y=Ax,\ e^x\sin y=Ay. \qquad (70''')$$

我们用等价的方程组(70‴)来代替(70). 前面已经指出，根的实部趋向于$+\infty$. 所以对离坐标原点足够远的根可以认为 $x>0$. 显然，由方程(70‴)可推出，若一数对(x, y)满足它，那

* 如果两个变量的比的极限是 1，就说它们渐近地相等.

求数对$(x, -y)$也满足它. 这就意味着，方程(70)的复根关于实轴对称，也就是成对的互为共轭. 所以可以谈论关于$y>0$的根的序列，和另一个(对称的)关于$y<0$的根的序列.

我们先研究$y>0$的根. 对于这些根，由上面刚证明的渐近等式

$$y\approx\frac{1}{A}e^{x},$$

所以方程(70'')的第二个给出了

$$\sin y\approx 1,$$

而这意味着，

$$y=\frac{\pi}{2}+2n\pi-\varepsilon_n,$$

当$n\to\infty$时，这里的$\varepsilon_n\to 0$(n取正整数). 把这个y值代入方程(70'')中的第一个，我们得到

$$e^{x}\sin\varepsilon_n=Ax \quad 或 \quad \sin\varepsilon_n=\frac{Ax}{e^{x}}.$$

因为$\sin\varepsilon_n\approx\varepsilon_n$，所以由此得到渐近等式

$$\varepsilon_n\approx\frac{Ax}{e^{x}}\approx\frac{Ax}{Ay}=\frac{x}{y}\approx\frac{\ln(Ay)}{y}.$$

但是由前面对y求出的公式得到，$y\approx 2n\pi$，因此

$$\varepsilon_n\approx\frac{\ln(2An\pi)}{2n\pi}.$$

于是，

$$y\approx\frac{\pi}{2}+2\pi n-\frac{\ln(2A\pi n)}{2\pi n},$$

$$x\approx\ln(Ay)=\ln\left[2A\pi n+\frac{A\pi}{2}-A\frac{\ln(2A\pi n)}{2\pi n}\right]$$

$$=\ln(2A\pi n)+\ln\left[1+\frac{1}{4n}-\frac{\ln(2A\pi n)}{4\pi^2n^2}\right]$$

$$\approx \ln(2A\pi n)+\frac{1}{4n}{}^{*}.$$

所以我们得到了关于方程(70)的根的渐近公式

$$z=x+iy\approx\ln(2A\pi n)+\frac{1}{4n}$$
$$\pm i\left[2\pi n+\frac{\pi}{2}-\frac{\ln(2A\pi n)}{2\pi n}\right],$$

这里 n 取正整数值（我们在一个公式里表达了带有正的虚部和带有负的虚部的两个根的序列）. 读者用代入法不难相信，求出的 z 值(精确到量 $\frac{\ln n}{n}$ 的级；当 n 无限增大时，$\frac{\ln n}{n}$ 无限小)近似地满足方程(70).

所得公式可以用于解方程

$$\sin z=Az \quad (当\ A>0). \tag{71}$$

在这个方程里根 $z=x+iy$ 成对地关于坐标原点对称,并且 $|y|$ 随着根离开坐标原点而无限增长. 由此推得,只要研究 $y<0$ 的根就可以了(要足够远离坐标原点)；另一根可用同时改变 x 和 y 的符号而得到. 用欧拉公式代替 $\sin z$, 这时方程(71)可写为:

$$e^{iz}-e^{-iz}=2Aiz,$$

或者,用新变量 w 代替 iz,

$$e^{w}-e^{-w}=2Aw. \tag{71'}$$

这里 $w=iz=-y+ix$, 并且当 $y\to-\infty$ 时, $|e^{-w}|=|e^{y-ix}|=e^{y}\to0$. 抛去无穷小量 e^{-w}, 我们得到了关于近似根的简化方程

---

* 我们应用著名公式

$$\ln(1+\varepsilon)\approx\varepsilon, \quad 当\ \varepsilon\to0\ 时.$$

取 $\varepsilon=\frac{1}{4n}-\frac{\ln(2A\pi n)}{4\pi^2n^2}$, 并抛弃 $-\frac{\ln(2A\pi n)}{4\pi^2n^2}$, 因为它是比 $\frac{1}{4n}$ 更高级的无穷小.

$$e^w = 2Aw.$$

与方程(70)相比较，我们看到了，w 可以用形如

$$w = u + iv \approx \ln(4A\pi n) + \frac{1}{4n} \pm i\left[2\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(4A\pi n)}{2\pi n}\right]$$

的渐近公式来表示．对于$z = \frac{1}{i}w = -iw$，我们得到

$$z \approx \pm\left[2\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{\ln(4A\pi n)}{2\pi n}\right] - i\left[\ln(4A\pi n) + \frac{1}{4n}\right],$$

这里 n 取正整数值． 如果考虑到根关于坐标原点对称，所以也必须在虚部前面冠以双重符号．

第 五 章

代数关系式·加法定理

28. 我们已经看到了，异于多项式的整函数 $f(z)$ 不满足任何代数方程（见第 16 段）．这也正是这种函数叫做超越函数的原因．但是两个超越整函数可能用代数方程联系起来．最简单的例子是 $\sin z$ 和 $\cos z$，它们满足关系式

$$\sin^2 z+\cos^2 z=1. \tag{75}$$

我们来研究更一般的关系

$$[f(z)]^n+[g(z)]^n=1, \tag{76}$$

这里 n 是不小于 2 的整数，我们提出的问题是，找出满足这一关系式的一切整函数．

我们从情况 $n=2$ 开始．除去 $\sin z$ 和 $\cos z$ 以外，是否还有其它整函数以这一形式的方程式相联系呢？因为(75)关于 z 是恒等式，所以以任何整函数代替 z 等式仍然成立．例如，我们可以写出：

$$\sin^2(1-z+2z^3)+\cos^2(1-z+2z^3)=1.$$

$$\sin^2(e^z)+\cos^2(e^z)=1.$$

一般地，若 $h(z)$ 是任一整函数，那末

$$\sin^2[h(z)]+\cos^2[h(z)]=1.$$

因为整函数的整函数还是整函数（见第 5 段），所以我们得到了下面的结果：

存在着无穷多对整函数

$$\sin[h(z)] \quad 和 \quad \cos[h(z)] \tag{77}$$

(这里 $h(z)$ 是任意一个整函数)，它们以代数关系式 (75) 相联系。

我们现在来证明逆定理的正确性：

如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是一对满足关系式

$$[f(z)]^2+[g(z)]^2=1 \tag{78}$$

的整函数，那末存在着一个整函数 $h(z)$，使得 $f(z)=\cos[h(z)]$ 和 $g(z)=\sin[h(z)]$.

为了定理的证明，我们把方程(78)化为形式

$$[f(z)+ig(z)][f(z)-ig(z)]=1. \tag{78'}$$

由此易见，$f(z)+ig(z)$是一整函数，对任何的 z 都不为零. 所以(见第 9 段)存在一个整函数，我们以 $ih(z)$来表示它，使得

$$f(z)+ig(z)=e^{ih(z)}, \tag{79}$$

因此，

$$f(z)-ig(z)=\frac{1}{f(z)+ig(z)}=e^{-ih(z)}. \tag{80}$$

由(79)和(80)可得：

$$f(z)=\frac{e^{ih(z)}+e^{-ih(z)}}{2}=\cos[h(z)],$$

$$g(z)=\frac{e^{ih(z)}-e^{-ih(z)}}{2i}=\sin[h(z)],$$

这就是要证明的.

29. 现在来研究一般方程

$$[f(z)]^n+[g(z)]^n=1, \tag{76}$$

这里 $n\geqslant3$，我们证明一个属于法国数学家蒙得尔的定理：不存在任何一对不恒等于常数的整函数满足这个方程式。

我们先把二项式 x^n+1分解成线性因子的乘积. 为此，只要求出方程 $x^n+1=0$ 或 $x^n=-1$ 的所有 n 个根就可以了. 这些根是：

$$x_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{n},$$

$$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

事实上，它们两两不同且都满足 $x_k^n=-1$.

为简单计，设 $x_0=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}=\varepsilon$，我们有

$$x_k=\left(\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\right)^{2k+1}=\varepsilon^{2k+1},\quad k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1.$$

因此，
$$x^n+1=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$
$$=(x-\varepsilon)(x-\varepsilon^3)\cdots(x-\varepsilon^{2n-1});$$

用商 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 代替 x，两边乘 $[g(z)]^n$，得到恒等式

$$[f(z)]^n+[g(z)]^n=[f(z)-\varepsilon g(z)][f(z)-\varepsilon^3 g(z)]$$
$$[f(z)-\varepsilon^5 g(z)]\cdots[f(z)-\varepsilon^{2n-1}g(z)].\tag{81}$$

由关系式(76)可推知，(81)式的右边对于任何 z 没有一项为零. 因为其中的每一项都是整函数，所以我们指出（见第 9 段），存在整函数 $h_0(z)$, $h_1(z)$, $\cdots$, $h_{n-1}(z)$，使得

$$f(z)-\varepsilon g(z)=e^{h_0(z)},\quad f(z)-\varepsilon^3 g(z)=e^{h_1(z)},$$
$$f(z)-\varepsilon^5 g(z)=e^{h_2(z)},\ \cdots,\ f(z)-\varepsilon^{2n-1}g(z)=e^{h_{n-1}(z)}.\tag{82}$$

我们研究这些等式中的前三个(所有这些等式中的 n，我们都假定 $n\geqslant 3$). 逐个地进行计算，由第一个减第二个，由第二个减第三个，我们得出

$$(\varepsilon^3-\varepsilon)g(z)=e^{h_0(z)}-e^{h_1(z)},$$
$$(\varepsilon^5-\varepsilon^3)g(z)=e^{h_1(z)}-e^{h_2(z)}.\tag{83}$$

注意到，
$$\varepsilon=\cos\frac{\pi}{n}+i\sin\frac{\pi}{n}\neq 0$$

和
$$\varepsilon^2=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\neq\pm 1$$

(因为 $n\geqslant3$). 所以由等式(83)得出:

$$\frac{e^{h_0(z)}-e^{h_1(z)}}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)}=\frac{e^{h_1(z)}-e^{h_2(z)}}{\varepsilon^3(\varepsilon^2-1)},$$

或者 $$\varepsilon^2e^{h_0(z)}+e^{h_2(z)}=(1+\varepsilon^2)e^{h_1(z)}.$$

这个式子可化为

$$\left[\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,e^{\frac{h_0(z)-h_1(z)}{2}}\right]^2+\left[\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,e^{\frac{h_2(z)-h_1(z)}{2}}\right]^2=1.$$

因为在方括号中的函数是整函数, 所以根据第 28 段的定理, 一定存在整函数 $h(z)$, 使得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,e^{\frac{h_0(z)-h_1(z)}{2}}&=\cos[h(z)],\\ \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}\,e^{\frac{h_2(z)-h_1(z)}{2}}&=\sin[h(z)].\end{aligned}\right\}\tag{84}$$

我们来证明 $h(z)$ 恒为常数. 如其不然,那末 $h(z)$ 一定或者是次数不低于 1 的多项式,或是超越整函数. 在第一种情况下,可以找到一个值 z_0, 使得 $h(z_0)=\frac{\pi}{2}$ (根据高等代数的基本定理). 当 $z=z_0$ 时, 方程(84)的第一个方程的左边不等于零, 而右边等于零,这是不可能的. 在第二种情况下,由于毕卡小定理(第 24 段), 至少方程 $h(z)=\frac{\pi}{2}$ 和 $h(z)=-\frac{\pi}{2}$ 中的一个有根(甚至有无穷多个根). 设 z_0 是其中的一个根,把 z_0 代入方程(84)中的第一个又得出矛盾.

这样一来, $h(z)$ 是常数已被证明. 由等式(84)可得, 等式左边的指数同样是常数:

$$\frac{h_0(z)-h_1(z)}{2}\equiv a,\quad \frac{h_2(z)-h_1(z)}{2}\equiv b.$$

但是由等式(83)的第一个得出

$$g(z)=\frac{e^{h_0(z)}-e^{h_1(z)}}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)}=e^{h_1(z)}\ \frac{e^{h_0(z)-h_1(z)}-1}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)}$$

$$=e^{h_1(z)}\ \frac{e^{2a}-1}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)}=\alpha e^{h_1(z)}, \tag{85}$$

这里 $\alpha=\frac{e^{2a}-1}{\varepsilon(\varepsilon^2-1)}$ 是常数. 另一方面,由等式(82)的第二个得出,

$$f(z)=\varepsilon^3 g(z)+e^{h_1(z)}=(\varepsilon^3\alpha+1)e^{h_1(z)}=\beta e^{h_1(z)}, \tag{86}$$

这里 $\beta=\varepsilon^3\alpha+1$.

代入(76),得到

$$(\alpha^n+\beta^n)e^{h_1(z)}=1,$$

即
$$e^{h_1(z)}=\frac{1}{\alpha^n+\beta^n}=\gamma$$

恒为常数. 与(85)和(86)相比较,我们确信,$f(z)$和 $g(z)$也恒为常数. 蒙得尔定理得证.

上面的结果可总结为: 如果整函数 $f(z)$和 $g(z)$满足形如

$$[f(z)]^n+[g(z)]^n=1$$

的代数关系式,这里 $n\geqslant 2$ 是整数,那末,当 $n=2$ 时,它们一定取下述形式:

$$f(z)=\cos[h(z)],\quad g(z)=\sin[h(z)],$$

这里 $h(z)$是整函数,而当 $n\geqslant 3$ 时,它们恒等于常数.

我们指出,上面证明蒙得尔定理的过程几乎可以毫无变动地应用于证明下面更一般的定理: 不存在任何一对不恒等于常数的整函数 $f(z)$和 $g(z)$,它们满足形如

$$a_0[f(z)]^n+a_1[f(z)]^{n-1}g(z)+\cdots+a_n[g(z)]^n=b$$

的方程,这里 $n\geqslant 3$, $b\neq 0$,方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 至少有 3 个彼此不同且异于零的根. 事实上,我们用 x_0, x_1, $\cdots$, x_{n-1} 表示后一方程的根,把整函数之间给定的关系改写为

$$\frac{a_0}{b}[f(z)-x_0g(z)][f(z)-x_1g(z)][f(z)-x_2g(z)]$$
$$\cdots[f(z)-x_{n-1}g(z)]=1.$$
其次，对三个不同的因子
$$f(z)-x_0g(z),\ f(z)-x_1g(z),\ f(z)-x_2g(z)$$
运用上面所进行的讨论可证明 $f(z)$ 和 $g(z)$ 恒等于常数.

30. 我们将不研究一些不同的整函数间的其它可能的代数关系式，而转向研究联系同一个整函数在不同点上所取的值之间的代数关系式.

我们从其中最简单的整函数的周期性条件
$$f(z+\omega)=f(z)$$
开始，这里 ω 是常数，叫做函数 $f(z)$ 的周期. 例如指数函数 e^z（周期是 $2\pi i$），三角函数 $\cos z$ 和 $\sin z$（周期是 2π）等等都是周期整函数. 如果 ω 是任意一个不等于零的复数，那末以 ω 为周期的最简单的整函数的例子是指数函数 $Ce^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$，这里 $C\neq0$. 显然，恒为常数的函数可视为周期函数，每一个复数都是它的周期. 我们来证明，除去常数外，任何多项式都不可能是周期函数. 事实上，当 $z\to\infty$ 时，$P(z)\to\infty$. 我们假定 $\omega\neq0$ 是多项式的周期. 若 z_0 是任一点，那末，
$$P(z_0)=P(z_0+\omega)=P(z_0+2\omega)$$
$$=\cdots=P(z_0+n\omega)=\cdots.$$
显然，当 $n\to\infty$ 时，$z_0+n\omega\to\infty$，因此，当 $n\to\infty$ 时，$P(z_0+n\omega)\to\infty$. 但是这个结论与 $P(z_0+n\omega)$ 始终等于常数 $P(z_0)$ 相矛盾. 这样一来，不恒等于常数的整函数 $f(z)$ 仅在它是超越函数的情况下才可能是周期函数.

借助于指数函数可以构造任意多的周期整函数. 例如设 $n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_k$ 是任意的彼此不同的整数. 这时整函数

$e^{\frac{2\pi i}{\omega}n_1 z}$, $e^{\frac{2\pi i}{\omega}n_2 z}$, …, $e^{\frac{2\pi i}{\omega}n_k z}$ 中的每一个都以 ω 为周期. 用任意复数 A_1, A_2, …, A_k(其中可以有零)分别乘它们, 然后加起来,我们就又得到一个以 ω 为周期的和形式的整函数:

$$f(z)=\sum_{j=1}^{k} A_j e^{\frac{2\pi i}{\omega}n_j z}.$$

这种类型的函数叫做三角多项式. 这个称呼是容易解释的; 根据公式

$$e^{\frac{2\pi i}{\omega}n_j z}=\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}n_j z\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}n_j z\right),$$

把指数函数化为三角函数,将 $f(z)$ 表示为

$$f(z)=\sum_{j=1}^{k}\left[A_j\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}n_j z\right)+iA_j\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}n_j z\right)\right].$$

特别地,我们假定 $n_1=-p$, $n_2=-p+1$, …, $n_k=p$, 这里的 p 是任意的非负整数(数 n_1, n_2, …, n_k 从 $-p$ 增加到 p, 每次增加 1, 显然, $k=2p+1$). 这时三角多项式可以写成下面的形式

$$f(z)=\sum_{-p}^{+p} A_j e^{\frac{2\pi i}{\omega}n_j z},$$

或者 $$f(z)=\sum_{-p}^{p}\left[A_j\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}jz\right)+iA_j\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}jz\right)\right].$$

利用正弦函数和余弦函数的奇偶性, 后面一个和还可以写成形式:

$$f(z)=A_0+\sum_{j=1}^{p}\left[(A_j+A_{-j})\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}jz\right)\right.$$
$$\left.+(iA_j-iA_{-j})\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}jz\right)\right].$$

设 $A_j+A_{-j}=a_j$, $iA_j-iA_{-j}=b_j$, 最后把三角多项式写成下面的形式:

$$f(z)=A_0+\sum_{j=1}^{p}\left[a_j\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}jz\right)+b_j\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}jz\right)\right].$$

在这个公式中只要在 a_p 和 b_p 中有一个不为零(这意味着在 A_p 和 A_{-p} 中只要有一个不为零),那末 p 就叫做三角多项式的级. 在 $p=0$ 时,我们得到常数,这是三角多项式的特殊情况.

下述定理把三角多项式从一切周期整函数中区分了出来:

如果以 $\omega\neq 0$ 为周期的周期整函数 $f(z)$ 对于某个 $C>0$ 和 $\gamma\geqslant 0$ 以及一切足够大的 $|z|$ ($|z|>R_0$) 满足形如

$$|f(z)|\leqslant Ce^{\gamma\frac{2\pi}{|\omega|}|z|}$$

的不等式,那末 $f(z)$ 是级不超过 $p=[\gamma]$ ($[\gamma]$ 表示 γ 的整数部分)的三角多项式.

特别地,如果 $0\leqslant\gamma<1$,那末 $p=[\gamma]=0$;所以当 $\gamma<1$ 时函数 $f(z)$ 恒为常数.

如果以 ω 为周期的周期整函数不是三角多项式,那末它可以表示为处处收敛的形如 $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}A_ne^{\frac{2\pi i}{\omega}nz}$ 的和的形式,它同样也可表示为三角级数:

$$f(z)=a_0+\left[a_1\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}z\right)+b_1\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}z\right)\right]+\cdots$$
$$+\left[a_n\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}z\right)+b_n\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}z\right)\right]+\cdots;\quad (87)$$

它的系数中有无穷多个不为 0.

逆定理也是正确的:每一个处处收敛的这种形式的级数表示一个以 ω 为周期的周期整函数. 并且,如果在级数的系数中可以找到无穷多个不为零,当然它也就区别于任何三角多项式了.

相应结果的证明写在附录§2中.

31. 自然地,每一个以 ω 为周期的函数还有其他的周期: $-\omega$, 2ω, -2ω, …; 一般说来, ω 的任何整数倍都是 $f(z)$ 的周期. 例如,

$$f(z-3\omega)=f[(z-3\omega)+\omega]=f(z-2\omega)$$
$$=f[(z-2\omega)+\omega]=f(z-\omega)=f[(z-\omega)+\omega]=f(z),$$

由此可知, -3ω 同样是 $f(z)$ 的周期.

如果 $k\omega$ 和 $l\omega$ 是 $f(z)$ 的任意两个周期, 那末它们的比 $\left(\frac{l}{k}\right)$是有理数.

但是,我们要问问自己,是否可能出现某个整函数 $f(z)$ 存在两个周期 ω_1 和 ω_2, 它们的比不是有理数呢? 原来, 只要 $f(z)$ 不恒等于常数, 那末这个问题的答案就是否定的. 换言之,不存在不恒为常数的整函数有两个周期,这两个周期的比不是有理数.

我们分两种情况来证明这一命题.

首先假定比 $\frac{\omega_2}{\omega_1}=\alpha$ 是实的无理数. 设 n 是任意一个自然数, p_n 是 $n\alpha$ 的整数部分. 这时 $0<n\alpha-p_n<1$, 由此可知, $|n\omega_2-p_n\omega_1|=|n\alpha-p_n||\omega_1|<|\omega_1|$.

显然, 如果 $m\neq n$, 那末 $n\omega_2-p_m\omega_1\neq n\omega_2-p_n\omega_1$ (如果假定 $m\omega_2-p_m\omega_1=n\omega_2-p_n\omega_1$, 那末就会得到 $\alpha=\frac{\omega_2}{\omega_1}=\frac{p_m-p_n}{m-n}$ 是有理数的结论,与条件相矛盾). 所以无穷个点

$$\omega_2-p_1\omega_1,\ 2\omega_2-p_2\omega_1,\ \cdots,\ n\omega_2-p_n\omega_1,\ \cdots$$

全都彼此不同, 且都包含在(以原点为中心)半径为 $|\omega_1|$ 的圆内,但是, 在这些周期的每一点处 $f(z)$ 都取同一个值 $f(n\omega_2-p_n\omega_1)=f(0)$ (要知道 ω_2 和 ω_1 是 $f(z)$ 的周期). 由此,再根据第 21 段可得, $f(z)\equiv f(0)$, 即 $f(z)$ 是常数.

我们现在研究 $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ 不是实数的情况. 由这个假定可以推出，由一个点(任意的)引出的向量 ω_1 和 ω_2 确定了某个平行四边形 P(图 4). 由函数 $f(z)$ 的周期性可得，函数在平面上任一点 z 处取的值同样在平行四边形内某点 z' 处也取到它，z' 和 z 以下面的关系式相联系:

$$z=z'+m_1\omega_1+m_2\omega_2$$

(m_1 和 m_2 是整数).

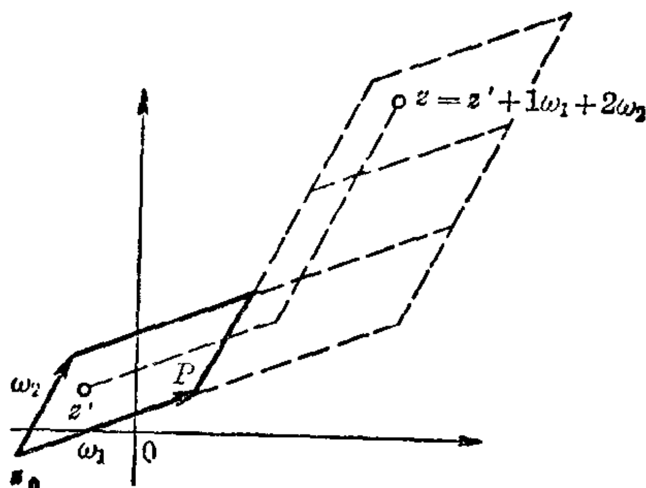


图 4

事实上,

$$f(z)=f(z'+m_1\omega_1+m_2\omega_2)=f(z'),$$

因为 ω_1 和 ω_2 是 $f(z)$ 的周期. 所以，如果在平行四边形 P 内 $|f(z)|$ 的一切值不超过某一个正数 M (这样的数是存在的，因为 $f(z)$ 是连续函数，所以它的模在 P 是有界的)，那末，在平面上任何点处它都得满足不等式

$$|f(z)|\leqslant M.$$

换言之，整函数的模在全平面是有界的. 但是根据刘维尔定理(第 14 段)这样的函数恒等于常数. 这就完成了这一命题的证明.

除整函数类外，我们还可以研究更广的亚纯函数类(见第 26 段). 原来在亚纯周期函数中存在着非常数的函数，以 ω_1 和 ω_2 为周期，它们的比为虚数. 这样的函数叫做**双周期函数**或**椭圆函数**. 它们在由向量 ω_1 和 ω_2 所构成的周期平行四边形中取的值在整个平面上重复取.

32. 形如

$$f(z+\omega)=af(z)\quad(\omega\neq 0,\ a\neq 0)\tag{88}$$

的关系式可以看作是关系式

$$f(z+\omega)=f(z)$$

的某种推广. 不难指出满足这种关系式的整函数的例子. 指数函数 $\varphi(z)=e^{\frac{\ln a}{\omega}z}$ 就是一例, 这里 $\ln a$ 是 a 的对数的主值(见第 8 段公式(22′)). 显然,

$$e^{\frac{\ln a}{\omega}(z+\omega)}=e^{\frac{\ln a}{\omega}z+\ln a}=e^{\ln a}e^{\frac{\ln a}{\omega}z}=ae^{\frac{\ln a}{\omega}z},$$

这就是说, 函数 $\varphi(z)$ 就满足(88):

$$\varphi(z+\omega)=a\varphi(z).\tag{88′}$$

用(88)比(88′)可得

$$f(z+\omega):\varphi(z+\omega)=f(z):\varphi(z).$$

由此得出, 商 $f(z):\varphi(z)$ 是以 ω 为周期的函数 $g(z)$. 并且 $g(z)$ 是整函数, 因为 $\varphi(z)$ 不为零. 于是

$$f(z)=\varphi(z)g(z)=e^{\frac{\ln a}{\omega}z}g(z),$$

也就是, 每一个满足 (88) 的整函数是指数函数 $e^{\frac{\ln a}{\omega}z}$ 乘上一个以 ω 为周期的周期整函数 $g(z)$.

引进记号

$$f(z)=u,\quad f(z+\omega)=v.$$

这时方程(88)就表示为

$$u-av=0.\tag{88″}$$

这是 u 和 v 之间的一个线性关系. 初看起来, 如果代替线性方程(88″), 我们来找满足任一个 n 次齐次代数方程

$$a_0u^n+a_1u^{n-1}v+a_2u^{n-2}v^2+\cdots+a_nv^n=0,\quad n\geqslant 1\tag{88‴}$$

的整函数, 这里为确定起见, 设 $a_0\neq 0$, 我们似乎得到了所研究问题的一个有意义的推广. 但是方程左边的多项式总可以进

行因式分解：

$$a_0(u-x_0v)(u-x_1v)\cdots(u-x_{n-1}v)=0,$$

所以又都归结为满足形如

$$u-x_kv=0 \quad (u=f(z+\omega),\ v=f(z))$$

的方程中的一个，而这种情况我们已经研究过了.

33. 在函数的三个值之间的一种有趣而重要的代数关系式由所谓代数加法定理来表示.

说函数 $f(z)$（假设这个函数是解析的，而在现在的情况下是整函数）具备代数加法定理（或服从代数加法定理），如果对任意的 z_1 和 z_2，函数值 $f(z_1)=u, f(z_2)=v$ 和 $f(z_1+z_2)=w$ 通过代数关系式

$$P(u,\ v,\ w)=0 \tag{89}$$

相联系（$P(u,\ v,\ w)$是三个变量 $u,\ v,\ w$ 的多项式）.

具备加法定理的整函数的最简单的例子是线性函数

$$f(z)=az.$$

这里 $u=az_1,\ v=az_2,\ w=a(z_1+z_2)$；显然，

$$w=u+v \quad 或 \quad w-u-v=0.$$

因此，在这种情况下可设 $P(u,\ v,\ w)=w-u-v$.

另一个例子是函数

$$f(z)=az^2.$$

这里 $u=az_1^2,\ v=az_2^2,\ w=a(z_1+z_2)^2$. 所以 $w=u+v+2\sqrt{uv}$，或者化去无理项，

$$(w-u-v)^2-4uv=0.$$

这里 $P(u,\ v,\ w)=(w-u-v)^2-4uv$ 是关于 $u,\ v,\ w$ 的二次多项式.

更一般的情况是函数 $f(z)=az^n$，这里 n 是整数，大于或等于 2. 在这里 $u=az_1^n,\ v=az_2^n,\ w=a(z_1+z_2)^n$，由此，$\sqrt[n]{w}=$

$\sqrt[n]{u}+\sqrt[n]{v}$. 这个地方同样可以化去无理项得到一个相应的多项式 $P(u, v, w)$. 但是不必实际地进行这个计算了. 保持这种比较简单的形式(带根式)的加法定理更方便些.

在指数函数 e^z 的情况下，众所周知(见第 7 段)，它取下面的形式:

$$e^{z_1}e^{z_2}=e^{z_1+z_2},$$

或者用我们的记号是 $w-uv=0$. 这里 $P(u, v, w)=w-uv$ 是一个二次多项式.

我们再研究函数 $\cos z$ 和 $\sin z$. 因为这些函数可以通过指数函数来表示，所以对于它们的加法定理可以通过指数函数的加法定理来引入.

具体过程如下. 根据欧拉公式 $e^{iz}=\cos z+i\sin z$, 所以

$$e^{i(z_1+z_2)}=\cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2). \tag{90}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}e^{i(z_1+z_2)}=e^{iz_1}e^{iz_2}&=(\cos z_1+i\sin z_1)(\cos z_2+i\sin z_2)\\&=(\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2)\\&\quad+i(\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1).\end{aligned} \tag{91}$$

比较可得:

$$\begin{aligned}&\cos(z_1+z_2)+i\sin(z_1+z_2)\\&=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2+i(\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1).\end{aligned} \tag{92}$$

因为在一般情况下，$\cos(z_1+z_2)$ 和 $\sin(z_1+z_2)$ 不是实数，所以我们不可能用分开实部和虚部的方法得到所要求的公式. 我们利用 $\sin z$ 和 $\cos z$ 的奇偶性(见第 7 段)来达到目的. 这里用 $-z_1$ 代替 z_1, 用 $-z_2$ 代替 z_2, 我们求出

$$\begin{aligned}&\cos(z_1+z_2)-i\sin(z_1+z_2)\\&\quad=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2\\&\qquad-i(\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1).\end{aligned} \tag{93}$$

最后，对(92)式和(93)式相应地进行逐项相加、逐项相减就得到公式

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2, \tag{94}$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\sin z_2\cos z_1. \tag{95}$$

在第一个公式中当 $z_1=z$ 和 $z_2=-z$ 时给出了

$$1=\cos^2 z+\sin^2 z. \tag{96}$$

公式(94)和(96)在外表上不同于上面所研究的加法定理. 事实上，例如 $\cos(z_1+z_2)$不仅必须通过 $\cos z_1$ 和 $\cos z_2$ 来表达，而且也通过另外的函数的值 $\sin z_1$ 和 $\sin z_2$ 来表达. 象以前一样，设 $\cos z_1=u$, $\cos z_2=v$, $\cos(z_1+z_2)=w$, 借助于公式(96)我们得到

$$\sin z_1=\sqrt{1-u^2},\quad \sin z_2=\sqrt{1-v^2},$$

因此，公式(94)取如下的形式

$$w=uv-\sqrt{1-u^2}\sqrt{1-v^2}.$$

为了把 $\cos z$ 的加法定理表示为直接符合于代数加法定理的定义的形式，只要化掉根号就行了. 我们有

$$(w-uv)^2-(1-u^2)(1-v^2)=0,$$

或者最后写成

$$w^2-2uvw+u^2+v^2-1=0. \tag{97}$$

于是，这里的 $P(u, v, w)=w^2-2uvw+u^2+v^2-1$ 是一个三次多项式.

请读者自己独立地去进行 $\sin z$ 的计算.

34. 在指数函数和三角函数的研究和使用中，加法定理的重要作用是众所周知的. 一切三角公式都是加法定理的推论.

上面我们已经导出了相应函数的加法定理.

作为例子，我们来证明，由已知的加法定理出发可以求出

整函数.

a) $f(z_1+z_2)=f(z_1)+f(z_2)$.

首先设 $z_1=z$, $z_2=0$, 我们得到 $f(z)=f(z)+f(0)$, 由此得 $f(0)=0$.

现在设 $z_1=z$ 是一个固定点, 而 $z_2=h\neq 0$ 是一个变数; 我们有

$$f(z+h)-f(z)=f(h)-f(0).$$

用 h 除两边, 令 $h\to 0$ 取极限, 我们得到

$$f'(z)=f'(0)=C\equiv \text{const}.$$

因此,
$$f(z)=Cz+b,$$
因为 $f(0)=0$, 所以 $b=0$. 最后

$$f(z)=Cz,$$

即 $f(z)$ 是 z 的线性函数.

b) $[f(z_1+z_2)-f(z_1)-f(z_2)]^2-4f(z_1)f(z_2)=0$.

设 $z_1=z$ 和 $z_2=0$, 我们有

$$[f(0)]^2-4f(0)f(z)=0,$$

由此, 或者 $f(0)=0$, 或者 $f(z)=\frac{1}{4}f(0)\equiv\text{const}$, 这就导出 $f(z)\equiv 0$. (因为在 $z=0$ 时, 我们得到 $f(0)=\frac{1}{4}f(0)$, 所以 $f(0)=0$.)

我们来求方程 b) 的不恒等于 0 的解. 这时对某个 $d\neq 0$ 必有 $f(d)\neq 0$. 在 b) 中设 $z_1=z$ 和 $z_2=d$. 我们求得

$$2\sqrt{f(d)}\sqrt{f(z)}=\pm[f(z+d)-f(d)-f(z)].$$

等式的右边是整函数 (因为 $f(z)$ 和 $f(z+d)$ 是整函数). 所以在左边的函数也是整函数, 因而 $\sqrt{f(z)}$ 也是整函数. 设 $\sqrt{f(z)}=\varphi(z)$.

由 b) 推出

$$f(z_1+z_2)-f(z_1)-f(z_2)=2\sqrt{f(z_1)}\sqrt{f(z_2)},$$

$$f(z_1+z_2)=(\sqrt{f(z_1)}+\sqrt{f(z_2)})^2,$$

由此 $$\sqrt{f(z_1+z_2)}=\sqrt{f(z_1)}+\sqrt{f(z_2)},$$

或者 $$\varphi(z_1+z_2)=\varphi(z_1)+\varphi(z_2).$$

我们证明了 $\varphi(z)$ 满足方程 a)．所以 $\varphi(z)=Cz$，因为 $f(z)=\varphi^2(z)$，所以

$$f(z)=C^2z^2.$$

在这个公式中，当 $C=0$ 时，我们就得了上面的解 $f(z)\equiv 0$.

c) $f(z_1+z_2)=f(z_1)f(z_2)$.

首先设 $z_1=z$，$z_2=0$；我们得到 $f(z)=f(z)f(0)$．如果 $f(0)\neq 1$，就有 $f(z)\equiv 0$．这是方程的一个解.

现在设 $f(z)\not\equiv 0$，这时 $f(0)=1$．令 $z_1=z$，$z_2=-z$，我们得到

$$f(0)=1=f(z)f(-z).$$

由此推出，对任何 z，$f(z)$ 都不等于零，因此 $\operatorname{Ln}f(z)$ 是整函数（见第 9 段）．精确地说，存在一个整函数 $g(z)$，使得

$$\operatorname{Ln}f(z)=g(z)+2k\pi i\quad(k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots).$$

对 c) 求对数可得

$$\operatorname{Ln}f(z_1+z_2)=\operatorname{Ln}f(z_1)+\operatorname{Ln}f(z_2),$$

由此， $$g(z_1+z_2)=g(z_1)+g(z_2).$$

因此，

$$g(z)=az,\quad \operatorname{Ln}f(z)=az+2k\pi i\quad 和\quad f(z)=e^{az+2k\pi i}=e^{az}.$$

这样一来，$f(z)\equiv 0$ 或 $f(z)=e^{az}$ 满足方程 c)，其中 a 是任意复常数.

d) $$[f(z_1+z_2)-f(z_1)f(z_2)]^2$$
$$-[1-f^2(z_1)][1-f^2(z_2)]=0.$$

设 $z_1=z$ 和 $z_2=0$，我们得到

$$f^2(z)[1-f(0)]^2-[1-f^2(z)][1-f^2(0)]=0,$$

或者 $$[1-f(0)]\{2[f(z)]^2-[1+f(0)]\}=0. \tag{98}$$

如果$[f(z)]^2=\frac{1+f(0)}{2}$是常数，那末它就满足上面的关系式．这个常数由方程

$$2[f(0)]^2-f(0)-1=0$$

确定．由此，

$$f(0)=1 \quad 或 \quad f(0)=-\frac{1}{2}.$$

通过直接验证可证实，两个常数$f(z)\equiv1$和$f(z)\equiv-\frac{1}{2}$满足方程d)．我们来找方程d)的其它解，正如方程(98)所指出的，这些解一定满足$f(0)=1$.

其次，可用不同方法求解．其一，把问题归结为上面所研究过的方程c)；其二，求出未知函数所必须满足的微分方程．

如果$f(0)=1$和$f(z)\not\equiv1$，那末$f^2(z)\not\equiv1$，因此可以找到一个值$z_2=a$，使得$f^2(a)\neq1$．在d)中设$z_1=z$，$z_2=a$，并把方程改写为

$$\sqrt{1-[f(z)]^2}\sqrt{1-[f(a)]^2}=\pm[f(z+a)-f(z)f(a)].$$

因为右边是z的整函数($f(z)$是z的整函数，因而$f(z+a)$也是)，所以$\sqrt{1-[f(z)]^2}$也是z的整函数．因此函数$f(z)+i\sqrt{1-[f(z)]^2}=\varphi(z)$一定是$z$的整函数．由方程d)求出

$$f(z_1+z_2)=f(z_1)f(z_2)-\sqrt{1-[f(z_1)]^2}\sqrt{1-[f(z_2)]^2}\,*$$

或者经简单的变形后

$$\sqrt{1-[f(z_1+z_2)]^2}=f(z_1)\sqrt{1-[f(z_2)]^2}+f(z_2)\sqrt{1-[f(z_1)]^2}.$$

因此，

* 如果在根式乘积的前面取 + 号，那末当$z_1=z_2=z$时，有$f(2^z)=1$，由此$f(z)\equiv1$．现在我们排除这种可能性．

$$\begin{aligned}\varphi(z_1+z_2)&=f(z_1+z_2)+i\sqrt{1-[f(z_1+z_2)]^2}\\&=\{f(z_1)f(z_2)-\sqrt{1-[f(z_1)]^2}\sqrt{1-[f(z_2)]^2}\}\\&\quad+i\{f(z_1)\sqrt{1-[f(z_2)]^2}\\&\quad+f(z_2)\sqrt{1-[f(z_1)]^2}\}\\&=\{f(z_1)+i\sqrt{1-[f(z_1)]^2}\}\\&\quad\times\{f(z_2)+i\sqrt{1-[f(z_2)]^2}\}=\varphi(z_1)\varphi(z_2).\end{aligned}$$

我们证明了整函数 $\varphi(z)$ 满足方程 c)．所以存在两种可能：首先，$\varphi(z)\equiv0$，必须排除这种可能，因为由此可得 $[f(z)]^2=[f(z)]^2-1$；其次，$\varphi(z)=e^{az}$．由 $f(z)+i\sqrt{1-[f(z)]^2}=e^{az}$ 我们导出

$$\begin{aligned}&f(z)-i\sqrt{1-[f(z)]^2}\\&\quad=1:[f(z)+i\sqrt{1-[f(z)]^2}]=e^{-az},\end{aligned}$$

因此，$f(z)=\dfrac{e^{az}+e^{-az}}{2}$，或者设 $a=\alpha i$，

$$f(z)=\frac{e^{i\alpha z}+e^{-i\alpha z}}{2}=\cos(\alpha z).$$

当 $\alpha=0$ 时，我们又得到 $f(z)\equiv1$．

这样一来，方程 d) 或为常数 $-\dfrac{1}{2}$ 和 1 所满足，或为形如 $\cos(\alpha z)$，$\alpha\neq0$，的超越整函数所满足．

研究一下这个问题的其它可能解法是有趣的．我们重新来找 $f(z)\neq\text{const}$；这时，正如我们上面所看到的，$f(0)=1$．在 d) 中设 $z_1=-z_2=z$，可得

$$[1-f(z)f(-z)]^2-\{1-[f(z)]^2\}\{1-[f(-z)]^2\}=0,$$

或者 $[f(z)-f(-z)]^2=0$，由此 $f(-z)=f(z)$．

于是，函数 $f(z)$ 一定是偶的．由此可得，$f(z)$ 的幂级数一定只含 z 的偶次幂：

$$f(z)=1+a_2z^2+a_4z^4+\cdots,$$

特别地，由此可断言，$f'(0)=0$.

最后，在 d) 中设 $z_1=z$, $z_2=h\neq 0$，并把方程化为

$$\{[f(z+h)-f(z)]-f(z)[f(h)-1]\}^2$$
$$+\{1-[f(z)]^2\}[f(h)-1][f(h)+1]=0.$$

注意到 $1=f(0)$，并用 h^2 除两边，可得

$$\left[\frac{f(z+h)-f(z)}{h}-f(z)\frac{f(h)-f(0)}{h}\right]^2$$
$$+\{1-[f(z)]^2\}\frac{f(h)-1}{h^2}[f(h)+1]=0.$$

令 $h\to 0$，取极限，并注意到

$$\frac{f(z+h)-f(h)}{h}\to f'(z),\quad \frac{f(h)-f(0)}{h}\to f'(0)=0,$$
$$\frac{f(h)-1}{h^2}\to a_2,\quad f(h)\to 1,$$

我们得到 $\qquad [f'(z)]^2+2a_2\{1-[f(z)]^2\}=0,$

或者，对它求导，

$$2f'(z)f''(z)-4a_2f(z)f'(z)=0.$$

因为 $f'(z)\not\equiv 0\ (f(z)\not\equiv \text{const})$，所以

$$f''(z)-2a_2f(z)=0.$$

这是一个二阶常系数线性微分方程. 设 $2a_2=-\alpha^2$（α 是复数），它的一般解表示为

$$f(z)=C_1e^{\alpha iz}+C_2e^{-\alpha iz}.$$

由条件 $f(0)=1$ 和 $f'(0)=0$，我们得到 $C_1=C_2=\frac{1}{2}$. 所以

$$f(z)=\frac{e^{i\alpha z}+e^{-i\alpha z}}{2}=\cos\alpha z.$$

35. 在上一段里，我们见到了几个具备代数加法定理的函数的例子. 除去常数函数外，我们研究了线性函数 az，形如

$az^n (n \geqslant 2)$ 的函数，指数函数 e^{az}，正弦函数和余弦函数．于是产生了这样一个问题：是否每一个整函数都具备代数加法定理呢？这个问题的答案有点意外．维尔斯特拉斯给出了下面的定理：

如果整函数 $f(z)$ 具备某一代数加法定理，那末它一定或者是代数多项式(特别地，是常数)，或者是三角多项式．

这样一来，一个这类函数或者可以表示成形式

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,$$

或者可以表示成形式

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 + [a_1 \cos(\alpha z) + b_1 \sin(\alpha z)] \\ + [a_2 \cos(2\alpha z) + b_2 \sin(2\alpha z)] + \cdots + \\ + [a_n \cos(n\alpha z) + b_n \sin(n\alpha z)]. \end{aligned}$$

当然，截止到现在我们所碰到的一切特殊情况都满足这个要求．为了看出指数函数 e^{az} 可视为三角多项式，只要根据欧拉公式把它表示为形式

$$e^{az} = \cos(-aiz) + i \sin(-aiz) = \cos(aiz) - i \sin(aiz).$$

如果所求的具备代数加法定理的函数是在比整函数更广的亚纯函数类(见第 26 段)里，那末在这种情况下有下述结果(同样属于维尔斯特拉斯)：

*或者有理函数，或者表示为两个三角多项式商的周期函数(特别地，函数 $\operatorname{tg} z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ 和 $\operatorname{ctg} z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$ 属于这一类)，最后，双周期函数，即椭圆函数具备代数加法定理．*这个研究超出了本书的范围．

附　　录

§1. 毕卡小定理

1. 在开始部分我们还需要补充最大模和整函数级的知识.

我们来证明最大模原理(它对任何解析函数都正确,不过为简单计,我们仅限于整函数):

如果整函数 $f(z) \neq \text{const}$, 那末它的模 $|f(z)|$ 在平面上任一点处都不会取得最大值.

事实上, 设 z_0 是平面上的任一点. 如果 $f(z_0)=0$, 那末正如所知,存在一个以 z_0 为中心的圆,在这个圆内除去点 z_0 外 $f(z)$ 没有其它零点(第 21 段). 这意味着在这个圆内,若 $z \neq z_0$, 则 $|f(z)|>|f(z_0)|=0$, 所以 $|f(z)|$ 在点 z_0 没有最大值.

现在设 $f(z_0) \neq 0$. 把函数展成 $(z-z_0)$ 的幂级数. 我们得到处处收敛的级数

$$f(z)=f(z_0)+b_1(z-z_0)+\cdots+b_n(z-z_0)^n+\cdots.$$

在这个级数中系数 $b_n(n=1, 2, \cdots)$ 一定有非零的(否则函数将恒等于常数 $f(z_0)$). 设 b_k 是级数的系数中第一个不为零的. 这时

$$f(z)=f(z_0)+b_k(z-z_0)^k+b_{k+1}(z-z_0)^{k+1}+\cdots \quad (b_k \neq 0). \quad (1)$$

把(1)改写为

$$f(z)=f(z_0)+b_k(z-z_0)^k + b_k(z-z_0)^k\left[\frac{b_{k+1}}{b_k}(z-z_0)+\frac{b_{k+2}}{b_k}(z-z_0)^2+\cdots\right]. \quad (1')$$

从点 z_0 出发可以引一条射线 L，使得这个射线上所有异于 z_0 的点 z 满足 $\operatorname{Arg}[b_k(z-z_0)^k]$ 与 $\operatorname{Arg} f(z_0)$ 相等；换言之，向量 $b_k(z-z_0)^k$ 与 $f(z_0)$ 平行且指向同一边(见图 5, a, b)。

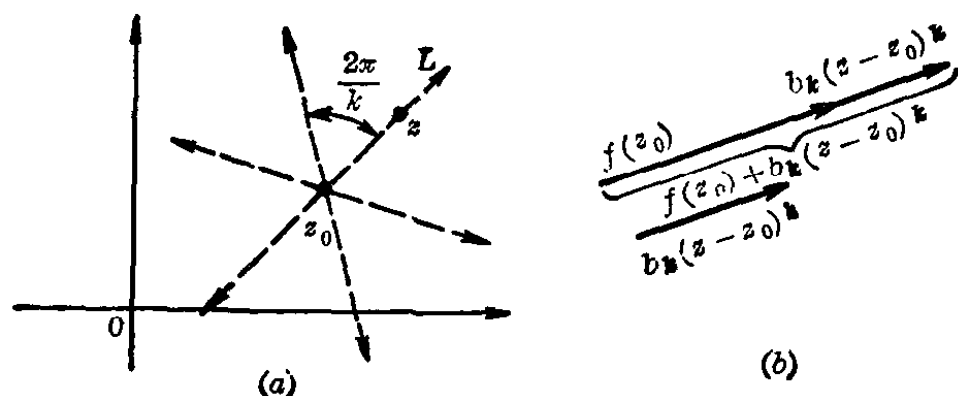


图 5

注意到

$$\operatorname{Arg}[b_k(z-z_0)^k]=\operatorname{Arg} b_k+k\operatorname{Arg}(z-z_0),$$

因此，如果取

$$\operatorname{Arg} b_k+k\operatorname{Arg}(z-z_0)=\operatorname{Arg} f(z_0),$$

也就是 $$\operatorname{Arg}(z-z_0)=\frac{\operatorname{Arg} f(z_0)-\operatorname{Arg} b_k}{k},$$

上面的条件就能满足(读者可相信，有 k 条不同的射线满足这个条件，任取其中一条作为 L 就行了；见图 5a)。

显然，在这个条件之下，$f(z_0)$ 与 $b_k(z-z_0)^k$ 的和的模在量上比 $|f(z_0)|$ 大 $|b_k(z-z_0)^k|$ 这么多。但是公式(1′)指出，要得到 $f(z)$ 还必须在指出的这个和中再加上一个和

$$\varphi(z)=b_k(z-z_0)^k\left[\frac{b_{k+1}}{b_k}(z-z_0)+\cdots\right].$$

因为当 $z\to z_0$ 时，

$$\frac{\varphi(z)}{b_k(z-z_0)^k}=\frac{b_{k+1}}{b_k}(z-z_0)+\frac{b_{k+2}}{b_k}(z-z_0)^2+\cdots\to 0,$$

所以可以认为 z 足够接近于 z_0，以至 $\left|\frac{\varphi(z)}{b_k(z-z_0)^k}\right|<\frac{1}{2}$，而这意味着，当把 $\varphi(z)$ 增补到和 $f(z_0)+b_k(z-z_0)^k$ 中时，如果能够减小这个和的模的话，也不会超过和的第二项的模的一半。于是，当位于 L 上的点足够接近于 z_0 时，就有

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |f(z_0)+b_k(z-z_0)^k+\varphi(z)|\\ &\geqslant |f(z_0)+b_k(z-z_0)^k|-|\varphi(z)|\\ &= |f(z_0)|+|b_k(z-z_0)^k|-|\varphi(z)|\\ &> |f(z_0)|+|b_k(z-z_0)^k|-\frac{1}{2}|b_k(z-z_0)^k|\\ &> |f(z_0)|. \end{aligned} \tag{2}$$

由这个不等式就可断言，$|f(z)|$ 不会在 z_0 取得最大值。定理得证。

由它可以导出一个重要的推论。

如果 $f(z)$ 是一个整函数，那末，对任意的 $r>0$，$f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant r$ 内的最大模在圆周 $|z|=r$ 的点上达到。

事实上，在 $f(z)\equiv\text{const}$ 的情况下，它的模同样是常数，因此，最大模与模在平面上任一点处的值相同，特别地，也同模在圆周 $|z|=r$ 上的任一点处的值相同。

现在设 $f(z)\not\equiv\text{const}$。因为 $|f(z)|$ 是 z 的连续函数（由 $f(z)$ 的连续性立刻可导出 $|f(z)|$ 的连续性），所以根据数学分析的著名定理，$|f(z)|$ 在圆 $|z|\leqslant r$ 内的最大值一定在这个圆的某一点 z_0 处达到。但是根据刚才所证明的，这个点不会在圆的内部（否则 $|f(z)|$ 将在这一点有最大值）。因此 z_0 放在圆的边界上，即 $|z_0|=r$。

这样一来，$f(z)$ 在圆 $|z|\leqslant r$ 内的模的最大值 $M(r)$ 是 $|f(z)|$ 在圆周 $|z|=r$ 上某点处的值，因此它与 $f(z)$ 在圆周

$|z|=r$ 上的模的最大值相重合.

2. 我们来建立一个类似于柯西不等式(正文第 10 段)的关于幂级数系数的不等式，在这个不等式中取代函数最大模的是它实部的最大值.

设 $f(z)$ 是一个整函数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots. \tag{3}$$

用 α_n 和 β_n 分别表示 a_n 的实部和虚部，所以 $a_n=\alpha_n+i\beta_n$，并用三角函数表示法表示 z:

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)\quad (r\geqslant 0).$$

这时有 $$f(z)=\sum_0^\infty(\alpha_n+i\beta_n)r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

用 $u(r,\ \theta)$ 表示 $f(z)$ 的实部. 由此可知,它的实部由下式表示:

$$u(r,\ \theta)=\alpha_0+\sum_1^\infty(\alpha_n\cos n\theta-\beta_n\sin n\theta)r^n. \tag{4}$$

固定 r，两边关于 θ 从 0 到 2π 积分，可得

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\ \theta)\,d\theta. \tag{5}$$

用类似的方法可以把级数(4)的系数表示为积分形式. 例如，为了算出 $\alpha_p(p\geqslant 1)$，就在(4)的两边乘上 $\cos p\theta$，然后从 0 到 2π 积分. 这时左边得到 $\int_0^{2\pi}u(r,\ \theta)\cos p\theta\,d\theta$，而右边除去一项 $\int_0^{2\pi}\cos^2 p\theta\,d\theta=\pi$ 外，其余的积分全是零. 因此，

$$\int_0^{2\pi}u(r,\ \theta)\cos p\theta\,d\theta=\alpha_pr^p\int_0^{2\pi}\cos^2 p\theta\,d\theta=\pi\alpha_pr^p,$$

由此

$$\alpha_pr^p=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}u(r,\ \theta)\cos p\theta\,d\theta\quad (p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \tag{6}$$

类似地，在(4)的两边乘上 $\sin p\theta$，并积分，可得

$$\beta_p r^p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)\sin p\theta\, d\theta \quad (p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \tag{7}$$

由公式(5), (6)和(7)引出

$$2\alpha_0 \pm \alpha_p r^p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)(1\pm\cos p\theta)d\theta, \tag{6'}$$

$$2\alpha_0 \pm \beta_p r^p = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(r,\ \theta)(1\pm\sin p\theta)d\theta. \tag{7'}$$

这两个公式比公式(6)和(7)的优越处在于，在积分号下现在对 $u(r,\ \theta)$乘的是非负因子.

我们用 $\mu(r)$来表示半径为 r 的圆周上的 $\max u(r,\ \theta)$:

$$\mu(r) = \max_{0\leqslant\theta\leqslant2\pi} u(r,\ \theta).$$

由公式(6')和(7')可得:

$$2\alpha_0 \pm \alpha_p r^p \leqslant \frac{\mu(r)}{\pi}\int_0^{2\pi}(1\pm\cos p\theta)d\theta = 2\mu(r),$$

$$2\alpha_0 \pm \beta_p r^p \leqslant 2\mu(r).$$

因此，$$|\alpha_p| \leqslant \frac{2[\mu(r)-\alpha_0]}{r^p},\ |\beta_p| \leqslant \frac{2[\mu(r)-\alpha_0]}{r^p}$$

$$(p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots). \tag{8}$$

现在可以证明下面的定理了，它是刘维尔定理(见正文第14段)的进一步加强.

如果对于一切足够大的值 $r(r>r_0)$，整函数 $f(z)$的实部 $u(r,\ \theta)$满足不等式

$$u(r,\ \theta) \leqslant \mu(r) \leqslant Cr^\delta \quad (\delta>0), \tag{9}$$

那末 $f(z)$ 一定是一个次数不高于 $n=[\delta]$ ($[\delta]$ 为 δ 的整数部分)的多项式.

事实上，由不等式(8)和(9)得到:

$$|\alpha_p| \leqslant \frac{2(Cr^\delta-\alpha_0)}{r^p},$$

$$|\beta_p| \leqslant \frac{2(Cr^{\delta}-\alpha_0)}{r^p} \quad (r>r_0). \tag{8'}$$

如果 $p>[\delta]$,那末,因为 p 是整数,这就意味着 $p\geqslant[\delta]+1>\delta$,所以当 $r\to\infty$ 时,不等式(8′)的右边部分趋向于零. 因此,如果 $p>[\delta]=n$,就有 $\alpha_p=\beta_p=0$,也就是 $a_p=\alpha_p+i\beta_p=0$. 于是公式(3)取形式

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n, \quad 这里\ n=[\delta],$$

定理得证.

3. 我们来证明与计算整函数的级有关的三个引理.

引理 1 *如果 $f(z)$ 是一个超越整函数, 而 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 分别是 m 和 n 次多项式, 且 $P(z)\neq 0$, 那末函数 $P(z)f(z)+Q(z)$ 的级 ρ_1 与函数 $f(z)$ 的级 ρ 相同, 即 $\rho_1=\rho$.*

引进记号:

$$\begin{aligned} M(r)&=\max_{|z|\leqslant r}|f(z)|,\\ M_1(r)&=\max_{|z|\leqslant r}|P(z)f(z)+Q(z)|. \end{aligned} \tag{10}$$

根据 2 所证明的,我们可以不去研究落在圆 $|z|\leqslant r$ 内的点,而只限于研究函数的模在圆 $|z|=r$ 上所取的值.

如果 a_mz^m 和 b_nz^n 分别是多项式 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 的最高次项, 那末根据正文中的不等式(28), 在那里曾设 $\varepsilon=\frac{1}{2}$, 可以断言, 当 $|z|=r>r_0$ 时,

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{2}|a_m|r^m\leqslant|P(z)|\leqslant\frac{3}{2}|a_m|r^m,\\ \frac{1}{2}|b_n|r^n\leqslant|Q(z)|\leqslant\frac{3}{2}|b_n|r^n. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

设 z_0 是圆周 $|z|=r$ 上的一点, 在这一点 $|f(z)|$ 达到值 $M(r)$. 这时

$$
\begin{aligned}
M_1(r) &\geqslant |P(z_0)f(z_0)+Q(z_0)| \\
&\geqslant |P(z_0)|\,|f(z_0)|-|Q(z_0)| \\
&\geqslant \frac{1}{2}\,|a_m|r^m M(r)-\frac{3}{2}\,|b_n|r^n.
\end{aligned} \tag{12}
$$

另一方面，设 z_1 是同一个圆周上的一点，在这一点 $|P(z)f(z)+Q(z)|$ 达到值 $M_1(r)$，我们有

$$
\begin{aligned}
M_1(r) &= |P(z_1)f(z_1)+Q(z_1)| \\
&\leqslant |P(z_1)|\,|f(z_1)|+|Q(z_1)| \\
&\leqslant \frac{3}{2}\,|a_m|r^m M(r)+\frac{3}{2}\,|b_n|r^n.
\end{aligned} \tag{13}
$$

因此，$\frac{1}{2}|a_m|r^m M(r)\left[1-\frac{3|b_n|r^n}{|a_m|r^m M(r)}\right]\leqslant M_1(r)$

$$
\leqslant \frac{3}{2}|a_m|r^m M(r)\left[1+\frac{|b_n|r^n}{|a_m|r^m M(r)}\right]. \tag{14}
$$

因为 $f(z)$ 是超越整函数，所以(见正文第 15 段) $M(r)$ 比任何多项式的模的最大值都增长得快，因此比 r 的任何次幂都增长得快．所以，当 $r\to\infty$ 时，不等式(14)中每一个方括号中的表达式都趋向于1．因此可以把 r 取得足够大，使得右边的括号比 2 小，左边的括号比 $\frac{2}{3}$ 大．我们得到

$$
\frac{1}{3}|a_m|r^m M(r)\leqslant M_1(r)\leqslant 3|a_m|r^m M(r). \tag{15}
$$

我们记得，整函数 $f(z)$ 的级是

$$
\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r;f)}{\ln r}=\rho \quad (\text{见正文第 17 段}).
$$

对(15)取对数，可得

$$
\begin{aligned}
\ln\left(\frac{1}{3}|a_m|r^m\right)+\ln M(r) &< \ln M_1(r) \\
&< \ln(3|a_m|r^m)+\ln M(r),
\end{aligned}
$$

或者

$$\ln M(r)\left[1+\frac{\ln\left(\frac{1}{3}|a_m|\right)+\ln(r^m)}{\ln M(r)}\right]$$

$$<\ln M_1(r)<\ln M(r)\left[1+\frac{\ln(3|a_m|)+\ln(r^m)}{\ln M(r)}\right]. \quad (16)$$

我们来证明，当 $r\to\infty$ 时，方括号中的表达式还是趋向于 1. 显然，为此只要检验当 $r\to\infty$ 时，形如 $\frac{\ln C+\ln(r^m)}{\ln M(r)}$ 的表达式趋向于零就行了，式中 $C\neq 0$. 第一项 $\frac{\ln C}{\ln M(r)}$ 是明显的(因为 $\ln M(r)\to\infty$). 设 $\varepsilon>0$ 是任一正数，把自然数 N 取得足够大，使得 $\frac{1}{N}<\varepsilon$，其次取 $r_0>1$，使得 $r>r_0$ 的一切 r 满足不等式 $\frac{r^{mN}}{M(r)}<1$ (由于 $M(r)$ 是超越整函数 $f(z)$ 的最大模，所以这是可能的). 这时 $r^{mN}<M(r)$, $N\ln(r^m)<\ln M(r)$ 和 $\frac{\ln(r^m)}{\ln M(r)}<\frac{1}{N}<\varepsilon$. 于是，当 $r\to\infty$ 时，$\frac{\ln(r^m)}{\ln M(r)}\to 0$. 由此可得，对所有足够大的 r，在不等式(16)中右边的方括号比 2 小，左边的方括号比 $\frac{1}{2}$ 大. 这样一来，

$$\frac{1}{2}\ln M(r)<\ln M_1(r)<2\ln M(r).$$

再取一次对数，我们有

$$\ln\frac{1}{2}+\ln\ln M(r)<\ln\ln M_1(r)<\ln 2+\ln\ln M(r).$$

除以 $\ln r$，令 $r\to\infty$ 取极限，就有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M_1(r)}{\ln r}$$

$$\leqslant\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r},$$

或者 $$\rho \leqslant \rho_1 \leqslant \rho.$$

由此，最后有 $\rho=\rho_1$. 因此，我们证明了，函数 $f(z)$ 和 $P(z)f(z)+Q(z)$ $(P(z)\neq 0)$ 的级相等.

引理 2 整函数

$$f(z)=P(z)e^{g(z)}+Q(z)$$

的级等于 n，这里 $P(z)$, $Q(z)$, $g(z)$ 是多项式，且 $P(z)$ 不恒等于 0，而 $g(z)$ 的次数是 n.

由于引理 1，$f(z)$ 的级与函数 $\varphi(z)=e^{g(z)}$ 的级一样. 我们记 $\max\limits_{|z|=r}|\varphi(z)|=M_1(r)$. 需要证明

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\ln\ln M_1(r)}{\ln r}=n.$$

设 $g(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_nz^n$,

$$c_k=\rho_k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k) \quad \text{和} \quad z=r(\cos\theta+i\sin\theta);$$

根据定理的条件，$\rho_n=|c_n|\neq 0$.

这时我们有

$$\begin{aligned}g(z)&=\sum_{k=0}^{n}\rho_k r^k(\cos\alpha_k+i\sin\alpha_k)(\cos k\theta+i\sin k\theta)\\&=\sum_{k=0}^{n}\rho_k r^k[\cos(\alpha_k+k\theta)+i\sin(\alpha_k+k\theta)].\end{aligned}$$

为了求出 $\varphi(z)$ 的模，只要在指数中保留后一表达式的实部就可以了. 所以

$$|\varphi(z)|=e^{\sum\limits_{k=0}^{n}\rho_k r^k\cos(\alpha_k+k\theta)}$$

和 $$\ln|\varphi(z)|=\sum_{k=0}^{n}\rho_k r^k\cos(\alpha_k+k\theta).$$

显然，对固定的 r 和 $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，求出了后一式的最大值，我们就得到了 $\ln\max\limits_{|z|=r}|\varphi(z)|$. 但是

$$\ln|\varphi(z)|\leqslant\sum_{0}^{n}\rho_k r^k$$

$$=\rho_n r^n\left(1+\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\frac{1}{r}+\cdots+\frac{\rho_0}{\rho_n}\frac{1}{r^n}\right),$$

因此，对任意的 ε, $0<\varepsilon<1$，和 $r>r(\varepsilon)$，将有

$$\ln|\varphi(z)|<\rho_n r^n(1+\varepsilon),$$

由此

$$\ln M_1(r)<\rho_n r^n(1+\varepsilon).$$

设 z_0 是圆周 $|z|=r$ 上的一点，关于这一点 $\cos(\alpha_n+n\theta_0)=1$（关于 n 存在那样的点；为了我们的目的只要在其中取一个就行了）。我们有

$$\ln M_1(r)\geqslant\ln|\varphi(z_0)|=\rho_n r^n+\sum_{0}^{n-1}\rho_k r^k\cos(\alpha_k+k\theta_0)$$

$$\geqslant\rho_n r^n-\sum_{0}^{n-1}\rho_k r^k$$

$$=\rho_n r^n\left[1-\left(\frac{\rho_{n-1}}{\rho_n}\frac{1}{r}+\cdots+\frac{\rho_0}{\rho_n}\frac{1}{r^n}\right)\right]$$

$$>\rho_n r^n(1-\varepsilon),\quad 当\ r>r(\varepsilon)时.$$

比较所得到的估计，我们推出，

$$\rho_n r^n(1-\varepsilon)<\ln M_1(r)<\rho_n r^n(1+\varepsilon).$$

再求一次对数，用 $\ln r$ 除，令 $r\to\infty$ 取极限，我们得到

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln\ln M_1(r)}{\ln r}=n.$$

因此，$\varphi(z)$ 的级等于 n，所以已给函数 $f(z)$ 的级也等于 n。

引理 3 如果 $g(z)$ 是整函数，并且 $f(z)=e^{g(z)}$ 的级是有穷的，那末，$g(z)$ 是多项式，所以 $f(z)$ 的级一定是整数。

设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$u(r,\theta)$ 是函数 $g(z)$ 的实部，那末，$|f(z)|=e^{u(r,\theta)}$，由此 $\ln|f(z)|=u(r,\theta)$。

记 $\max\limits_{|z|=r}|f(z)|=M(r)$ 和 $\max\limits_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}u(r,\theta)=\mu(r)$。那末，

$$\ln M(r)=\mu(r). \tag{17}$$

设 δ 是 $f(z)$ 的级. 这意味着,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}=\delta.$$

对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 $r(\varepsilon)>1$, 使得当 $r>r(\varepsilon)$ 时,

$$\frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}<\delta+\varepsilon,$$

即
$$\ln\ln M(r)<\ln(r^{\delta+\varepsilon}),$$

或
$$\ln M(r)<r^{\delta+\varepsilon}. \tag{18}$$

由(17)和(18)推出,

$$\mu(r,\ \theta)<r^{\delta+\varepsilon},\ r>r(\varepsilon).$$

根据本节第 2 段的定理, $g(z)$ 是一个多项式, 它的次数 n 不超过 $\delta+\varepsilon$ 的整数部分, 即 $n\leqslant[\delta+\varepsilon]$; 因为 ε 任意小, 由此可得, $n\leqslant[\delta]$. 根据引理 2 函数 $f(z)$ 的级 δ 必定与 n 相等; 所以 δ 是整数:

$$\delta=n.$$

引理 3 得证.

4. 现在容易证明关于有穷级整函数的毕卡小定理了. 并且代替方程 $f(z)=A$ 而研究方程 $f(z)=AP(z)$ (这里 $P(z)$ 是多项式), 我们给出这一定理的更一般的形式. 首先设整函数的级不是整数.

定理 1 如果 $f(z)$ 是超越整函数, 它的级是有穷的但不是整数, 而 $P(z)$ 是不恒等于零的多项式, 那末方程

$$f(z)=AP(z) \tag{19}$$

对任意的 A(没有任何例外)都有无穷多个根.

我们用反证法来证明. 假设定理不真, 存在一个常数 $A=A_0$, 使方程(19)只有有限个根(也可能一个根也没有).

这时整函数 $f(z)-A_0P(z)$ 只有有限个零点. 根据正文第 20 段, 在这种情况下 $f(z)-A_0P(z)$ 可以表示为

$$f(z)-A_0P(z)=Q(z)e^{g(z)},\tag{20}$$

由此

$$f(z)=A_0P(z)+Q(z)e^{g(z)}.\tag{21}$$

这里 $Q(z)$ 是一个不恒等于零的多项式（如果方程 $f(z)-A_0P(z)=0$ 根本就没有根的话，可认为它恒等于1），$g(z)$ 是某一个整函数.

根据前段的引理 1，函数 $f(z)$ 的级 δ 一定与函数 $e^{g(z)}$ 的级相等，因此根据引理 3，它是整数，这与定理的条件相矛盾.于是，定理 1 得证. 现在转向以有限整数为级的整函数. 下面的命题是正确的.

定理 2 *如果 $f(z)$ 是超越整函数，它的级是有限整数 n，而 $P(z)$ 是不恒等于零的多项式，那末方程*

$$f(z)=AP(z)\tag{22}$$

除去可能存在的 A 的一个例外值外，对任何 A 都有无穷多个根.

我们假设定理不真. 这时一定至少存在着两个值 a 和 $b\neq a$，使方程(22)只有有限个根.这意味着整函数 $f(z)-aP(z)$ 和 $f(z)-bP(z)$ 只有有限个零点.因此可以断言（见正文第 20 段），

$$f(z)-aP(z)=Q_1(z)e^{g_1(z)},f(z)-bP(z)=Q_2(z)e^{g_2(z)},\tag{23}$$

这里 $Q_1(z)$ 和 $Q_2(z)$ 是不恒等于零的多项式，而 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 是整函数. 由 3 的引理 1 可得，$e^{g_1(z)}$ 和 $e^{g_2(z)}$ 的级都等于 $f(z)$ 的级 n.

根据 3 的引理 3 和引理 2，我们得出函数 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 一定是 n 次多项式的结论.特别地，由此可得 $n\geqslant1$，因为在 $n=0$ 的情况下，$g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 就将是常数，由公式(23)就可推出 $f(z)$ 是多项式（而不是超越整函数）. (23) 的第一式减第二式得到

$$Q_1(z)e^{g_1(z)}-Q_2(z)e^{g_2(z)}=(b-a)P(z)=p(z), \qquad (24)$$

这里多项式 $p(z)=(b-a)P(z)$ 不恒为零(因为 $b\neq a$, $P(z)\not\equiv 0$). 我们的目的是去证明，当多项式 $Q_1(z)$, $Q_2(z)$ 和 $p(z)$ 都不恒为零,而 $g_1(z)$ 和 $g_2(z)$ 是次数 $n\geqslant 1$ 的多项式时,那样的恒等式不可能成立. 对(24)式求导可得

$$[Q_1'(z)+Q_1(z)g_1'(z)]e^{g_1(z)}-[Q_2'(z)+Q_2(z)g_2'(z)]e^{g_2(z)}$$
$$=p'(z). \qquad (25)$$

如果把(24)和(25)看作是以 $e^{g_1(z)}$ 和 $e^{g_2(z)}$ 为未知数的方程组，那末，这个方程组的行列式 $\varDelta(z)$ 是:

$$\begin{aligned}\varDelta(z)&=-Q_1(z)[Q_2'(z)+Q_2(z)g'(z)]\\&\quad+Q_2(z)[Q_1'(z)+Q_1(z)g_1'(z)]\\&=Q_2(z)Q_1'(z)-Q_1(z)Q_2'(z)\\&\quad+Q_1(z)Q_2(z)[g_1'(z)-g_2'(z)]. \qquad (26)\end{aligned}$$

我们来证明多项式 $\varDelta(z)\not\equiv 0$. 如果不然,在恒等式 $\varDelta(z)\equiv 0$ 的两边除以 $Q_1(z)Q_2(z)$, 将有

$$\frac{Q_1'(z)}{Q_1(z)}-\frac{Q_2'(z)}{Q_2(z)}+[g_1(z)-g_2(z)]'=0.$$

两边求积分可得

$$\mathrm{Ln}\,\frac{Q_1(z)}{Q_2(z)}+g_1(z)-g_2(z)\equiv \mathrm{const}=C_1, \qquad (27)$$

由此

$$\frac{Q_1(z)}{Q_2(z)}e^{g_1(z)-g_2(z)}=e^{C_1}=C\neq 0. \qquad (28)$$

由公式(23)得出:

$$\frac{Q_1(z)}{Q_2(z)}e^{g_1(z)-g_2(z)}=\frac{f(z)-aP(z)}{f(z)-bP(z)}.$$

所以公式(28)意味着

$$\frac{f(z)-aP(z)}{f(z)-bP(z)}=C,$$

由此 $\qquad (1-C)f(z)=(a-bC)P(z)$.

因为 $b\neq a$,所以 $C\neq 1$. 因此

$$f(z)=\frac{a-bC}{1-C}P(z),$$

这与假设相矛盾(要知道 $f(z)$ 是超越整函数!). 这样一来, $\Delta(z)\neq 0$. 关于 $e^{g_1(z)}$ 和 $e^{g_2(z)}$ 解方程组(24)和(25), 我们得到

$$e^{g_1(z)}=\frac{-p(z)[Q_2'(z)+Q_2(z)g_2'(z)]+p'(z)Q_2(z)}{\Delta(z)},$$

$$e^{g_2(z)}=\frac{p'(z)Q_1(z)-p(z)[Q_1'(z)+Q_1(z)g_1'(z)]}{\Delta(z)}.$$

但是这两个等式也含有矛盾, 因为它们的左边是超越整函数(它们的级 n 不低于 1), 而左边是有理函数(因此, 是多项式). 这就完成了定理 2 的证明.

5. 第 4 段定理 1 的条件保证了没有例外值, 如果撇开这一条件, 那末定理 1 和 2 这两个定理可以看作下述定理的一个很特殊的情况, 下面的定理也属于毕卡.

毕卡定理 设 $\varphi(z)$ 是一个超越亚纯函数(特别地, 是一个超越整函数). 无论怎样的复数 A, 有限的或无限的, 除去两个可能的例外, 方程

$$\varphi(z)=A$$

都有无穷多个根.

如果 $\varphi(z)$ 是一个整函数, 那末, 无论对于怎样的 z 它都不会取 ∞ 值. 所以所有的整函数有一个例外值 $A=\infty$. 因此, 根据上面的定理, 超越整函数最多有一个有穷例外值. 这正是毕卡小定理的内容.

如果 $f(z)$ 是一个超越整函数, $P(z)$ 是一个不恒为 0 的多项式, 那末亚纯函数 $\varphi(z)=\dfrac{f(z)}{P(z)}$ 仅在有限个点上变为 ∞ (在

多项式 $P(z)$ 的零点处）．所以，首先值 ∞ 就是它的一个例外值，由于本段的定理它只可能有一个（有限的）例外值．因此可以断言，方程 $\frac{f(z)}{P(z)}=A$，或者 $f(z)=AP(z)$，对每一个值 A，可能除去一个有限的 A 值，都有无穷多个根．当 $f(z)$ 的级为有穷时，就是本节第 4 段所证明的（定理 1 和 2）．

最后，设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个超越整函数，它们的比不是有理函数．这就意味着 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 是超越亚纯函数．根据上面的定理可以断言，方程 $\frac{f(z)}{g(z)}=A$，或者 $f(z)=Ag(z)$ 对任何 A 有无穷多个根，最多除去两个例外值，这个定理曾在正文的第 26 段提到过．

§2．周期整函数·维尔斯特拉斯定理

6．在正文第 30 段曾引用函数 $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$ 作为最简单的以 ω $(\omega\neq0)$ 为周期的函数的例子．设 $t=e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}$，我们来证明，除去点 $t=0$ 外，每一个以 ω 为周期的周期整函数都可以看作是在复平面 t 的所有点上的单值解析函数．事实上，$\operatorname{Ln} t=\frac{2\pi i}{\omega}z$，由此 $z=\frac{\omega}{2\pi i}\operatorname{Ln} t$．当 $t\neq0$ 时，这是 t 的（多值）解析函数．因为在给定 t 的情况下，$\operatorname{Ln} t$ 的所有值都只差 $2\pi i$ 的整数倍，那末对应于同一个 t 的一切 z 值彼此差 ω 的整数倍．所以它们都对应于周期函数 $f(z)$ 的同一个值．因此，$f(z)$ 在整个平面上是 t 的单值函数，但除去 $t=0$ 外．我们用 $\varphi(t)$ 来表示它：

$$\varphi(t)=f(z)=f\left(\frac{\omega}{2\pi i}\operatorname{Ln} t\right). \tag{29}$$

根据复合函数微分法，

$$\varphi'(t)=f'(z)\frac{dz}{dt}=f'(t)\frac{\omega}{2\pi i}t^{-1},$$

也就是，在任一点 $t\neq 0$ 处导数 $\varphi'(t)$ 存在．所以，除去原点外，$\varphi(t)$ 在平面的所有点处是解析函数．对于这种函数由解析函数的一般理论，下述的定理是正确的，它是罗朗定理的特殊情况：

如果 $\varphi(t)$ 在平面的所有点上，可能除去点 $t=0$，是单值解析的，那末它可以表示为形如

$$\varphi(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n t^n \tag{30}$$

的处处收敛的广义幂级数（罗朗级数）的和，一般说来，这个和中不仅包含 t 的非负指数幂而且也包含 t 的负指数幂．

如果我们对级数 (30) 采用在正文第 10 段用过的以积分表示系数的方法，我们就得出下面的公式：

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\varphi(t)}{t^n}d\alpha, \tag{31}$$

这里点 $t=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 在 t 平面上以正的方向描过以原点为心以 r 为半径的圆周（r 是任意正数）．然后象第 10 段那样进行讨论，我们得出不等式

$$|a_n|\leqslant\frac{\mu(r)}{r^n},\quad n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \cdots, \tag{32}$$

这里

$$\mu(r)=\max_{|t|=r}|\varphi(t)|. \tag{33}$$

在我们的情况下

$$t=e^{\frac{2\pi i}{\omega}z}\quad 和\quad \varphi(t)=f\left(\frac{\omega}{2\pi i}\mathrm{Ln}\,t\right)=f(z).$$

所以由公式(30)得到

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_n e^{\frac{2\pi i}{\omega}nz}, \tag{34}$$

也就是，任何以 ω 为周期的周期整函数 $f(z)$ 可以表示为形如(34)的处处收敛的级数的和，这个级数的项是带有同一周期 ω 的最简单的周期函数(指数函数)。

在这个和中用 $\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}nz\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}nz\right)$ 代替 $e^{\frac{2\pi i}{\omega}nz}$，并适当地归并项，我们就可以把 $f(z)$ 表示为如下的三角级数的和：

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}nz\right)+B_n\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}nz\right)\right]. \tag{35}$$

我们来证明下面的关于周期函数的基本定理：

如果对于某个 $C>0$，$\gamma>0$ 和所有足够大的 $|z|$ 值($|z|>R_0$)，以 ω 为周期的周期整函数 $f(z)$ 满足形如

$$|f(z)|\leqslant Ce^{\gamma\frac{2\pi}{|\omega|}|z|} \tag{36}$$

的不等式，那末 $f(z)$ 一定是级不高于 $p=[\gamma]$(γ 的整数部分)的三角多项式。

我们利用不等式(32)(类似于幂级数系数的柯西不等式)来证明定理。

我们指出，在目前的情况下，

$$\mu(r)=\max_{|t|=r}|\varphi(t)|=\max_{|t|=r}\left|f\left(\frac{\omega}{2\pi i}\operatorname{Ln}t\right)\right|.$$

为了借助不等式(36)来估计这个量，我们首先研究在 $|t|=r$，也就是在 $t=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ 的情况下 $\frac{\omega}{2\pi i}\operatorname{Ln}t$ 的值，这里 $0\leqslant\alpha\leqslant2\pi$。我们有

$$\frac{\omega}{2\pi i}\operatorname{Ln} t=\frac{\omega}{2\pi i}(\ln|t|+i\operatorname{Arg} t)$$

$$=\frac{\omega}{2\pi i}[\ln r+i(\alpha+2k\pi)]$$

$$=\frac{\alpha}{2\pi}\omega+k\omega+\frac{\omega}{2\pi i}\ln r.$$

所以 $$f\left(\frac{\omega}{2\pi i}\operatorname{Ln} t\right)=f\left(\frac{\alpha}{2\pi}\omega+k\omega+\frac{\omega}{2\pi i}\ln r\right)$$

$$=f\left(\frac{\alpha}{2\pi}\omega+\frac{\omega}{2\pi i}\ln r\right),$$

因为 $k\omega$ 是 $f(z)$ 的周期. 因此,

$$\mu(r)=\max_{0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi}\left|f\left(\frac{\alpha}{2\pi}\omega+\frac{\omega}{2\pi i}\ln r\right)\right|. \tag{37}$$

设 $z=\frac{\alpha}{2\pi}\omega+\frac{\omega}{2\pi i}\ln r$, 我们指出, $|z|=\frac{|\omega|}{2\pi}|\ln r+i\alpha|$ 不仅随着 $r\to\infty$ 而无限增长, 而且也随着 $r\to 0$ 而无限增长. 所以可以认为 $|z|>R_0$ 或者对足够大的 $r>r_1>1$ 或者对于足够小的 $r<r_2<1$ 成立. 在每一种情况下都可利用 (36) 来估计 $|f(z)|$. 因为 $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, 我们有

$$|f(z)|\leqslant Ce^{\gamma|\ln r+i\alpha|}<Ce^{\gamma(|\ln r|+2\pi)}.$$

设 $Ce^{2\pi\gamma}=C_1$, 把这个不等式改写为

$$|f(z)|<C_1e^{\gamma|\ln r|}. \tag{38}$$

如果, 例如 $r>r_1>1$, 那末 $|\ln r|=\ln r$ 及 $e^{\gamma|\ln r|}=r^\gamma$. 因此,

$$\mu(r)=\max|f(z)|<C_1r^\gamma,$$

由 (31) $$|a_n|<\frac{C_1r^\gamma}{r^n}.$$

显然, 如果 $n>p=[\gamma]$, 那末 $n\geqslant[\gamma]+1>\gamma$, 所以当 $r\to\infty$ 时, 不等式的右边趋近于零. 因此,

当 $n>p$ 时, $a_n=0$, 即

$$a_{p+1}=a_{p+2}=a_{p+3}=\cdots=0. \tag{39}$$

今设 $r<r_2<1$. 这时 $|\ln r|=\ln\dfrac{1}{r}$, 不等式(38)就表示为: $|f(z)|<C_1r^{-\gamma}$. 因此, $\mu(r)=\max|f(z)|<C_1r^{-\gamma}$. 由(31)

$$|a_n|<\frac{C_1r^{-\gamma}}{r^n}=C_1r^{-n-\gamma}.$$

把 n 取作比 $-p=-[\gamma]$ 小的负值, 这时 $n\leqslant -p-1$, 因为 $p+1=[\gamma]+1>\gamma$, 所以 $-p-1<-\gamma$, 即 $n<-\gamma$, $-n-\gamma>0$; 所以当 $r\to 0$ 时, $r^{-n-\gamma}\to 0$, 因此

当 $n<-p$ 时, $a_n=0$, 即

$$a_{-p-1}=a_{-p-2}=a_{-p-3}=\cdots=0. \tag{40}$$

考虑到(39)和(40), 我们肯定, 无穷级数(34)归结为一个有限和

$$f(z)=\sum_{-p}^{+p}a_ne^{\frac{2\pi i}{\omega}nz}. \tag{34'}$$

用 $\cos\left(\dfrac{2\pi}{\omega}nz\right)+i\sin\left(\dfrac{2\pi}{\omega}nz\right)$ 代替 $e^{\frac{2\pi i}{\omega}nz}$, 合并同类项(并且利用正弦和余弦的奇偶性), 最后我们得到

$$f(z)=a_0+\left[A_1\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}z\right)+B_1\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}z\right)\right]+\cdots$$
$$+\left[A_p\cos\left(\frac{2\pi}{\omega}pz\right)+B_p\sin\left(\frac{2\pi}{\omega}pz\right)\right], \tag{35'}$$

这就是所要证明的.

我们指出逆定理同样正确:

如果 $f(z)$ 是一个 p 次三角多项式, 即 $f(z)=\sum\limits_{-p}^{p}a_ne^{\frac{2\pi i}{\omega}nz}$, 那末, 存在一个正数 C, 使得对于所有的 z 满足

$$|f(z)|<Ce^{p\frac{2\pi}{|\omega|}|z|}.$$

事实上,

$$|f(z)| \leqslant \sum_{-p}^{p} |a_n| e^{\frac{2\pi}{|\omega|}|n||z|} \leqslant \sum_{-p}^{p} |a_n| e^{\frac{2\pi}{|\omega|}p|z|}$$
$$= C e^{\frac{2\pi}{|\omega|}p|z|}, \tag{41}$$

这里 $C=\sum_{-p}^{p}|a_n|$.

所以不满足基本定理条件的周期函数不可能是三角多项式. 因为在任何情况下它都可表示为形如

$$f(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2\pi i}{\omega}nz}$$

的级数, 所以在这个级数中有无穷多个系数不为 0.

7. 设 $f(z)$ 是整函数. 如果它是多项式, 那末对它来说就存在代数加法定理.

事实上, 利用高等代数*中指出的方法, 可以从方程

$$\left.\begin{aligned} u-f(z_1)=0, \\ v-f(z_2)=0, \\ w-f(z_1+z_2)=0 \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

中消去变量 z_1 和 z_2. 结果我们就得到了一个 u, v, w 之间的代数关系式:

$$P(u, v, w)=0$$

($P(u, v, w)$ 是多项式).

现在设 $f(z)$ 是一个超越整函数. 我们来证明, 如果它具有代数加法定理, 那末这个函数一定是周期的. 这个论断构成了维尔斯特拉斯当初所证的一个定理的实质性部分.

我们先证明下面的引理.

如果 $p_0(u, v)\neq 0$ 是一个 u 和 v 的多项式, 那末存在无穷多个 u 值, 使得 $p_0(u, v)$ 关于 v 不恒为零.

设 $\quad p_0(u, v)=q_0(u)v^m+q_1(u)v^{m-1}+\cdots+q_m(u)$,

* 例如见 A. Г. 库洛什著《高等代数教程》.

这里 $q_0(u)$, …, $q_m(u)$是多项式,并且 $q_0(u)\neq 0$.

如果 $q_0(u)$ 的幂等于 s, 那末存在着不超过 s 个不同的 u 值使 $q_0(u)=0$. 有无穷多个 u 的值不同于这 s 个值, 它们都使 $q_0(u)\neq 0$, 因此多项式 $q_0(u)v^m+q_1(u)v^{m-1}+\cdots+q_m(u)$不恒等于零. 引理得证.

现在设关于 $f(z)$的加法定理具有下面的形式:

$$P(u,\ v,\ w)=w^n p_0(u,\ v)+w^{n-1}p_1(u,\ v)+\cdots+p_n(u,\ v)=0, \tag{43}$$

这里 $p_0(u,\ v)\neq 0$, $p_1(u,\ v)$, …, $p_n(u,\ v)$是多项式. 根据引理可以求出无穷多个不同的 u 的值, 其中每一个都使 $p_0(u,\ v)\neq 0$ 关于 v 成立. 如果 a 和 b 是两个这样的值, 那末, 根据毕卡小定理,方程

$$f(z)=a \quad 或 \quad f(z)=b \quad (a\neq b)$$

当中至少一个有无穷多个根. 我们假定,方程

$$f(z)=a \tag{44}$$

是这种情况. 这时可以指出这个方程的 $n+1$ 个不同的根: c_1, c_2, …, c_{n+1}. 于是, $p_0(a,\ v)\neq 0$ 和 $f(c_1)=f(c_2)=\cdots=f(c_{n+1})=a$, 这里 c_1, c_2, …, c_{n+1} 是两两不相等的.

在(43)中设

$$u=f(c_j)=a,\ v=f(z) \quad 和 \quad w=f(c_j+z),$$

我们得到

$$p_0[a,\ f(z)][f(c_j+z)]^n+p_1[a,\ f(z)][f(c_j+z)]^{n-1}+\cdots+p_n[a,\ f(z)]=0 \quad (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1). \tag{43'}$$

如果 $v=f(z)$不是方程 $p_0(a,\ v)$的根(这种巧合不会超过 t 个函数 $f(z)$ 的值, t 是 $p_0(a,\ v)$ 关于 v 的方幂), 那末 $p_0[a,\ f(z)]\neq 0$,从而方程

$$p_0[a, f(z)]w^n+p_1[a, f(z)]w^{n-1}$$
$$+\cdots+p_n[a, f(z)]=0 \tag{43''}$$
关于w是n次幂的．所以它有不多于n个不同的根．另一方面，由于(43′)，$n+1$个数
$$f(c_1+z),\ f(c_2+z),\ \cdots,\ f(c_{n+1}+z)$$
中的每一个一定都满足这个方程．由此可得，这些数中至少有两个彼此相等．例如，设
$$f(c_j+z)=f(c_k+z),\ c_k\neq c_j. \tag{45}$$
如果取另外一个值$z'\neq z$，那末对它得到另外一对指标j'和k'，并有
$$f(c_{j'}+z')=f(c'_k+z'),\ c_{k'}\neq c_{j'}.$$
我们将用圆$|z|\leqslant 1$内的任何点作为z，但这些z要使$v=f(z)$的值不与方程$p_0(a, v)=0$的t个根中的任何一个相重合．这样的例外值只有有限个；所以可得到无穷多个不同的z以及和它们相对应的满足关系式(45)的指标对j和k，并且$1\leqslant j\leqslant n+1$和$1\leqslant k\leqslant n+1$．因为一切可能不同的指标对只有有限个$\left(就是,\dfrac{(n+1)n}{2}\right)$，所以至少有一对指标，例如$j_0$和$k_0$，对圆$|z|\leqslant 1$无穷多个点$z$是重复的．因此，这无穷多个点$z$将满足等式
$$f(c_{j_0}+z)=f(c_{k_0}+z),\ c_{k_0}\neq c_{j_0}, \tag{45'}$$
这里指标j_0和k_0不随z改变．因为$f(c_{j_0}+z)$和$f(c_{k_0}+z)$是z的整函数，所以由它们在圆$|z|\leqslant 1$内的无穷多个点处的值相等可得，它们彼此恒等(见正文第21段整函数的唯一性定理)．

这样一来，

$$f(c_{j_0}+z)\equiv f(c_{k_0}+z) \tag{45''}$$

或设 $c_{j_0}+z=\zeta$，因此 $c_{k_0}+z=c_{k_0}-c_{j_0}+\zeta$：

$$f(\zeta)\equiv f[\zeta+(c_{k_0}-c_{j_0})]. \tag{46}$$

由此我们看到了，$\omega=c_{k_0}-c_{j_0}\neq 0$ 是 $f(z)$ 的周期，即 $f(z)$ 是一个周期函数.

8. 但是不是一切超越整函数都具有加法定理. 维尔斯特拉斯定理进一步断言，那样的函数一定是三角多项式，因此就满足形如(36)的不等式. 定理这一部分的证明与已证明过的部分基于同样的思想，但是要求对周期函数有更深刻的认识，并且基点不在毕卡小定理而在所谓毕卡大定理. 我们指出，根据完全形式的维尔斯特拉斯定理，周期整函数 e^{e^z}（它的周期显然是 $2\pi i$）不服从代数加法定理，正是因为它的模的最大值增长得太快（见正文第 17 段）.

最后，整函数的维尔斯特拉斯定理可这样叙述：

维尔斯特拉斯定理 *如果超越整函数 $f(z)$ 服从代数加法定理，那末它一定是三角多项式.*

逆命题同样正确：*每一个三角多项式服从代数加法定理.*

事实上，设

$$f(z)=\sum_{-p}^{p}a_ne^{\frac{2\pi i}{\omega}nz}, \tag{47}$$

这里 a_n 是复系数. 不管取怎样的 z_1 和 z_2，都可写出

$$\left.\begin{aligned} u=\sum_{-p}^{+p}a_ne^{\frac{2\pi i}{\omega}nz_1},\quad v=\sum_{-p}^{+p}a_ne^{\frac{2\pi i}{\omega}nz_2},\\ w=\sum_{-p}^{+p}a_ne^{\frac{2\pi i}{\omega}n(z_1+z_2)}.\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

为简单起见，设 $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z_1}=t_1$ 和 $e^{\frac{2\pi i}{\omega}z_2}=t_2$. 这时关系式(48)可改写为下面的形式

$$u-\sum_{-p}^{+p} a_n t_1^n=0, \quad v-\sum_{-p}^{+p} a_n t_2^n=0,$$

$$w-\sum_{-p}^{+p} a_n t_1^n t_2^n=0, \tag{49}$$

或者，消去 t_1 和 t_2 的负次幂化为形式

$$\left.\begin{aligned} ut_1^p-(a_{-p}+a_{-p+1}t_1+\cdots+a_p t_1^{2p})=0, \\ vt_2^p-(a_{-p}+a_{-p+1}t_2+\cdots+a_p t_2^{2p})=0, \\ wt_1^p t_2^p-(a_{-p}+a_{-p+1}t_1t_2+\cdots+a_p t_1^{2p}t_2^{2p})=0. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

由这个含有 5 个未知数三个方程式的方程组中可以消去 t_1 和 t_2，结果得到一个 u, v, w 满足的代数方程式：

$$P(u, v, w)=0.$$

这就是三角多项式(47)的加法定理。